

(第3時限：100分)

2014年度 ②

数 学 問 題

(全5ページ)

薬学方式専用

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 問題文の にあてはまる適当なものを、解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
3. 解答用紙2枚・下書用紙2枚は、この冊子の中に折り込んであります。
4. 試験終了後、問題冊子・下書用紙は持ち帰りなさい。

数 学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの設問について問題文の にあてはまる適当なものを，解答用紙の所定の欄に記入しなさい。なお解答が分数になる場合はすべて既約分数で答えること。

Ⅰ

〔1〕 a を定数とするとき， x の3次方程式

$$x^3 + (a - 1)x^2 + x + 3 - a = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

について，

- (a) 任意の a の値に対し，方程式①は $x = \text{ア}$ を解にもつ。
(b) 方程式①の3つの解のうちの2つが等しいとき， a の値の中で最も小さい値は $a = \text{イ}$ であり，最も大きい値は $a = \text{ウ}$ である。

〔2〕 $a > 0$ ， $a \neq 1$ とする。

$\log_a 8 = 1.81$ ， $\log_a 27 = 2.88$ ， $\log_a 125 = 4.12$ として，次の4つの数の大小を考える。

$$1, \log_a \sqrt{3}, \log_a \frac{9}{2}, \log_{10} a$$

この4つの数を大小の順に並べると， $x < y < z < w$ となる。このとき，

$x = \text{エ}$ ， $z = \text{オ}$ である。

[3] 座標平面上に2点 $P(\cos \theta, \sin \theta)$, $Q(\cos 2\theta, 2 \sin 2\theta)$ がある。

ただし, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。

原点を O とするとき, $\triangle OPQ$ の面積 S を, $\sin \theta$ を用いて表すと,

$$S = \frac{1}{2} \left(\boxed{\text{カ}} \right) \text{ である。}$$

したがって, 面積 S が最大となるのは, $\theta = \boxed{\text{キ}}$ のときで, 最大値は $\boxed{\text{ク}}$ である。

[4] $\triangle OAB$ において, $OA = \sqrt{3}$, $OB = \sqrt{2}$, $AB = 2$ である。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とする。

(a) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値を求めると, $\boxed{\text{ケ}}$ である。

(b) 辺 OB の中点を M , 頂点 O から辺 AB に下ろした垂線と線分 AM の交点を P とするとき, $\overrightarrow{OP}$ を, $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表すと, $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{13} \left(\boxed{\text{ク}} \right)$ である。

II 放物線と直線で囲まれた図形の面積を考える。

- [1] 放物線 $C_1: y = x^2 + 1$ に原点 O から 2 つの接線を引き、傾きが正の接線との接点を A 、傾きが負の接線との接点を B とする。 B の座標は $(\boxed{\text{サ}}, \boxed{\text{シ}})$ である。

次に、放物線 C_1 と直線 $y = \boxed{\text{シ}}$ で囲まれた図形の面積を S_1 、放物線 C_1 と原点 O から C_1 に引いた 2 つの接線で囲まれた図形の面積を S_2 とすると、 $S_1 = \boxed{\text{ス}}$ 、 $S_2 = \boxed{\text{セ}}$ である。

- [2] a, b を定数 ($b > 0$) とする放物線 $C_2: y = x^2 + ax + b$ と原点 O から C_2 に引いた 2 つの接線を考える。 x 座標が大きい方の接点を P 、小さい方の接点を Q とすると、 P の座標は $(\boxed{\text{ソ}}, \boxed{\text{タ}})$ で、 Q の座標は $(\boxed{\text{チ}}, \boxed{\text{ツ}})$ である。

次に、放物線 C_2 と直線 PQ で囲まれた図形の面積 S_3 を求めると、 $S_3 = \boxed{\text{テ}}$ である。放物線 C_2 と原点 O から C_2 に引いた 2 つの接線で囲まれた図形の面積 S_4 を求めると、 $S_4 = \boxed{\text{ト}}$ である。

- [3] 点 $(0, b + 1)$ を通る傾き m の直線と [2] の放物線 C_2 で囲まれた図形の面積を S_5 とする。 S_5 が最小となるのは、 $m = \boxed{\text{ナ}}$ のときで、 S_5 の最小値は $\boxed{\text{ニ}}$ である。

Ⅲ n 階建て ($n \geq 2$) のホテルの全客室に、2 種類の新聞 A 紙と B 紙 (どちらも全客室数に比べて十分多い) のどちらか 1 紙を必ず配るときの配り方の総数 a_n を考える。ただし、A 紙を配った客室の上下および隣の客室には必ず B 紙を配るものとする。

ホテルは 1 階に客室はなく、2 階以上には客室が各階に 2 つある n 階建てとし、客室の下には客室が 1 つのみ存在する。

例えば、2 階建て ($n = 2$) の場合、配る客室は 2 階の 2 客室のみなので、A 紙の配り方で場合分けすると、A 紙を配らない場合と、A 紙を客室 1 つだけに配る場合があり、配り方の総数は $a_2 = 3$ となる。右図は、4 階建て ($n = 4$) の場合の新聞の配り方の 1 例を示している。

A	B	4 階
B	A	3 階
B	B	2 階
		1 階

[1] $a_3 =$, $a_4 =$, $a_5 =$ である。

[2] ここで、6 階建てのホテルの場合の総数は、5 階建てと 4 階建てのホテルでの総数を用いて、 $a_6 =$ $a_5 +$ a_4 と表される。同様に考えると、一般の場合でも、 $a_{n+2} =$ $a_{n+1} +$ a_n という漸化式が成り立つ。

[3] したがって、 a_8 の値は である。

[4] 次に、上で定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めるため、[2] の漸化式を $(a_{n+2} - \alpha a_{n+1}) = \beta (a_{n+1} - \alpha a_n)$ に変形する。この式を満たす α, β の組を 2 つ求めると、 $\alpha =$, $\beta =$ (複号同順) となる。

[5] [4] で得られる 2 つの漸化式を用いて数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めると、 $a_n =$ ($n \geq 2$) である。

IV 座標平面上の3点A, B, Cを考える。最初, 点A, Bはともに原点O(0, 0)に, 点Cは点(1, 0)に位置している。

表と裏が出る確率が等しい3枚のコイン α , β , γ を同時に投げ, 次のように3点A, B, Cを動かす。コイン α で表が出たとき, 点Aは x 軸上を正の方向に1進み, 裏が出たとき, 点Aは同じ位置にとどまる。コイン β で表が出たとき, 点Bは x 軸上を負の方向に1進み, 裏が出たとき, 点Bは同じ位置にとどまる。コイン γ で表が出たとき, 点Cは原点Oを中心に半径1の円周上を反時計回りに45度回転移動し, 裏が出たとき, 点Cは同じ位置にとどまる。

このような試行を4回繰り返すとき, 次の各問いに答えよ。

ただし, [2], [3]において, 3点の作る面積とは, 3点が同一直線上にあるときは0とし, そうでないときは, その3点を頂点とする三角形の面積とする。

[1] 3点A, B, Cがすべて x 軸上に位置する確率は , 3点A, B, Cのうちの2点が同じ位置にある確率は , 3点A, B, Cが二等辺三角形の頂点となる確率は である。

[2] 3点A, B, Cの作る面積の最大値 S は, $S =$ で, 最大値をとる確率は である。また, 3点A, B, Cの作る面積が無理数となる確率は である。

[3] 3点O, A, Cの作る面積の期待値 E は, $E =$ である。