

(第3時限：100分)

2014年度 ③

数 学 問 題

(理 系)

(全4ページ)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 問題文の にあてはまる適当なものを、解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
3. 解答用紙1枚・下書用紙2枚は、この冊子の中に折り込んであります。
4. 試験終了後、問題冊子・下書用紙は持ち帰りなさい。

数 学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの設問について問題文の にあてはまる適当なものを，
解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

Ⅰ a を実数とし，定点 $P(a, -2a^2)$ と 3 次曲線

$$C: y = x^3 - 3x^2$$

を考える。

〔1〕 曲線 C 上の点 $(t, t^3 - 3t^2)$ における接線の方程式は

$$y = \boxed{\text{ア}}$$

であり，この接線が点 P を通るための必要十分条件は t が方程式

$$2t^3 - 3 \left(\boxed{\text{イ}} \right) t^2 + \boxed{\text{ウ}} t - \boxed{\text{エ}} = 0 \quad \cdots \cdots \text{①}$$

を満たすことである。①の左辺を t の関数と考えて $g(t)$ とおく。このとき，
導関数 $g'(t)$ は

$$g'(t) = 6 \left(t - \boxed{\text{オ}} \right) \left(t - \boxed{\text{カ}} \right)$$

であり， $g \left(\boxed{\text{オ}} \right) g \left(\boxed{\text{カ}} \right)$ を a の多項式として因数分解すると

$$g \left(\boxed{\text{オ}} \right) g \left(\boxed{\text{カ}} \right) = \boxed{\text{キ}}$$

となる。

〔2〕 点 P から曲線 C に 3 本の接線が引ける a の範囲は

$$a < \boxed{\text{ク}}, \quad \boxed{\text{ク}} < a < \boxed{\text{ケ}}$$

である。

Ⅱ 曲線 $C: y = \log x$ 上に点 P_0 をとり、その x 座標を p とする。ただし、対数は自然対数とする。 P_0 における曲線 C の接線と y 軸との交点を Q_1 とすると、 Q_1 の y 座標は コ である。 Q_1 を通り x 軸に平行な直線と曲線 C との交点を P_1 とすると、 P_1 の x 座標は サ である。

次に、 P_1 における曲線 C の接線と y 軸との交点を Q_2 とし、 Q_2 を通り x 軸に平行な直線と曲線 C との交点を P_2 とする。この操作を続けて、 y 軸上の点 $Q_1, Q_2, \dots, Q_k, \dots$ と曲線 C 上の点 $P_1, P_2, \dots, P_k, \dots$ を定める。このとき、点 Q_k の y 座標は シ , 点 P_k の x 座標は ス である。2 直線 $P_{k-1}Q_k, Q_kP_k$ と曲線 C で囲まれた図形の面積を S_k とすると

$$S_1 = \text{セ} \text{ } , S_k = \text{ソ} \text{ } S_{k-1} \text{ } (k \geq 2), \sum_{k=1}^{\infty} S_k = \text{タ} \text{ }$$

である。

Ⅲ $a > 0$ として、関数

$$f(x) = \left(2a - \frac{1}{a}\right) \cos^2 x + 6 \cos x \sin x + \left(\frac{2}{a} - a\right) \sin^2 x$$

を考える。 $f(x)$ を $\cos 2x$, $\sin 2x$ を用いて表すと

$$f(x) = \boxed{\text{チ}} \cos 2x + \boxed{\text{ツ}} \sin 2x + \boxed{\text{テ}}$$

である。 $f(x)$ の最大値を M , 最小値を m とすると

$$M = \boxed{\text{ト}}, m = \boxed{\text{ナ}}$$

である。 $0 \leq x \leq \pi$ の範囲における, x についての方程式 $f(x) = M$ の解を x_1 , $f(x) = m$ の解を x_2 とすると,

$$\cos x_1 = \boxed{\text{ニ}}, \cos x_2 = \boxed{\text{ヌ}}, x_1 - x_2 = \boxed{\text{ネ}}$$

である。 a を変化させるとき, 積 Mm のとりうる値の範囲は

$$Mm \leq \boxed{\text{ノ}}$$

である。

IV 1個のさいころを4回投げて、出た目を順に X, Y, Z, W とする。

$\frac{X}{Y} = 1$ となる確率は であり、 $\frac{X}{Y} = 2$ となる確率は である。ま

た、 $\frac{X}{Y}$ が整数となる確率は である。

$\frac{X}{Z} = 1$ かつ $\frac{Y}{W} = 1$ である確率は である。 $\frac{X}{Z} = 2$ かつ $\frac{Y}{W} = \frac{1}{2}$ である確率は である。 $\frac{X}{Z} = 3$ かつ $\frac{Y}{W} = \frac{1}{3}$ である確率および $\frac{X}{Z} = \frac{3}{2}$ かつ $\frac{Y}{W} = \frac{2}{3}$ である確率は共に である。 $\frac{XY}{ZW} = 1$ である確率は である。

(注：全て既約分数で答えよ。)