

I

【解答】

|     |      |   |             |   |     |   |      |   |     |
|-----|------|---|-------------|---|-----|---|------|---|-----|
| 〔1〕 |      |   |             |   |     |   |      |   |     |
| ア   | 9000 | イ | 4536        | ウ | 9   | エ | 3888 | オ | 567 |
| 〔2〕 |      |   |             |   |     |   |      |   |     |
| カ   | 2    | キ | $t^2-t+a-2$ | ク | 2   | ケ | 2    | コ | -2  |
| 〔3〕 |      |   |             |   |     |   |      |   |     |
| サ   | $n$  | シ | 19          | ス | 361 | セ | 399  | ソ | 19  |

【解説】

- 〔1〕
- (a) 千の位に用いることができるのは、0以外の9個であり、それ以外の位では10個すべて用いることができる。従って、求める個数は $9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9000$  (個)である。
- (b) 千の位から順に考えていくと、求める個数は $9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536$  (個)である。
- (c) 1111, 2222, ..., 9999 の9個が考えられる。
- (d) 千の位の選び方は9通りある。4桁の整数が異なる3つの数字からなるので、数が重複する位が1組ある。この組に千の位が含まれる場合は、そのもう片方の位とほかの位の数を考えると $9 \times 3 \times 9 \times 8 = 1944$  (個)である。また、千の位が含まれる場合は重複する組の位と数、残りの数を考えると $9 \times {}_3C_2 \times 9 \times 8 = 1944$  (個)である。従って、求める個数は $1944 + 1944 = 3888$  (個)である。
- (e) つくりうるすべての整数の個数から、(b), (c), (d)の個数の和から引いたものが求める個数となるので $9000 - (4536 + 9 + 3888) = 567$  (個)である。

〔2〕

底の変換公式より
$$\begin{aligned} t &= \log_2 x + \log_x 2 \\ &= \log_2 x + \frac{\log_2 2}{\log_2 x} \\ &= \log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} \end{aligned}$$
となる。 $x > 1$ より $\log_2 x > 0$ である。従って、相加相乗平均の関係より
$$t \geq 2 \sqrt{\log_2 x \cdot \frac{1}{\log_2 x}} = 2$$
とわかる。また、 $t$ を2乗すると
$$\begin{aligned} t^2 &= \left( \log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} \right)^2 \\ &= (\log_2 x)^2 + 2 + \left( \frac{1}{\log_2 x} \right)^2 \\ \therefore (\log_2 x)^2 + \left( \frac{1}{\log_2 x} \right)^2 &= t^2 - 2 \qquad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$
となる。一方 $y$ は
$$y = (\log_2 x)^2 + \left( \frac{1}{\log_2 x} \right)^2 - (\log_2 x + \log_x 2) + a$$
と変形できるので、 $t$ と①を代入すると
$$\begin{aligned} y &= t^2 - t + a - 2 \\ &= \left( t - \frac{1}{2} \right)^2 + a - 2 \end{aligned}$$
となる。 $t \geq 2$ の範囲で $y$ は単調増加するので、 $y$ が最小となるのは $t = 2$ のときである。このとき

$$\begin{aligned} t &= 2 \\ \Leftrightarrow \log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} &= 2 \\ \Leftrightarrow (\log_2 x)^2 - 2 \log_2 x + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\log_2 x - 1)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \log_2 x &= 1 \\ \therefore x &= 2 \end{aligned}$$

であり、
$$\begin{aligned} 2^2 - 2 + a - 2 &= -2 \\ \Leftrightarrow a &= -2 \end{aligned}$$
である。

〔3〕

二項定理より
$$\begin{aligned} x_n &= (20-1)^n \\ &= \sum_{k=0}^n {}_nC_k \cdot 20^{n-k} \cdot (-1)^k \\ &= 20^n - {}_nC_1 \cdot 20^{n-1} \cdot (-1) + \cdots + {}_nC_{n-1} \cdot 20 \cdot (-1)^{n-1} + (-1)^n \\ &= 20^n - n \cdot 20^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot n \cdot 20 + (-1)^n \end{aligned}$$
と表すことができる。 $n = 1, 2$ のとき
$$x_1 = 19, x_2 = 361$$
となるので
$$y_1 = 19, y_2 = 361$$
である。 $n > 3$ のとき
$$x_n = 400 \left\{ 20^{n-2} - n \cdot 20^{n-3} + \cdots + {}_nC_2 \cdot (-1)^{n-2} \right\} + (-1)^{n-1} \cdot n \cdot 20 + (-1)^n$$
となる。

[1]  $n$ が奇数のとき  
実数 $k$ を用いて
$$x_n = 400k + 20n - 1$$
となる。 $y_n$ について、 $n$ が20間隔で $x_n$ が400増えるので、周期が20の数列であることがわかる。従って、 $y_n$ の最大値は379、最小値は19とわかる。

[2]  $n$ が偶数のとき  
実数 $k$ を用いて
$$x_n = 400k + 399 - 20n$$
となる。 $y_n$ について、 $n$ が20間隔で $x_n$ が400増えるので、周期が20の数列であることがわかる。従って、 $y_n$ の最大値は399、最小値は19とわかる。

以上、[1], [2]より $y_n$ の最大値は399、最小値は19とわかる。



## II

〔解答〕

|   |               |   |               |   |   |   |        |   |       |
|---|---------------|---|---------------|---|---|---|--------|---|-------|
| タ | 2             | チ | $\frac{1}{2}$ | ツ | 1 | テ | 2      | ト | 2     |
| ナ | $\frac{1}{2}$ | ニ | $\frac{1}{2}$ | ヌ | 1 | ネ | $2^n$  | ノ | $n-2$ |
| ハ | $2n-2$        | ヒ | $\frac{4}{3}$ | フ | 3 | ヘ | $2-2n$ | ホ | 7     |

〔解説〕

〔1〕

$n=1$  のとき

$$\begin{aligned} P_1 &= P_0 + \frac{1}{4}X_1 \\ &= \frac{1}{4}X_1 \end{aligned}$$

となるので、取引利益は

$$\begin{aligned} R_1 &= \left(1 - \frac{1}{4}X_1\right)X_1 \\ &= -\frac{1}{4}X_1^2 + X_1 \\ &= -\frac{1}{4}(X_1 - 2)^2 + 1 \end{aligned}$$

と表せる。従って、取引利益が最大となるのは

$$X_1 = 2$$

のときである。これより

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{2} \\ R_1 &= \left(1 - \frac{1}{4} \cdot 2\right) \cdot 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

とわかる。

〔2〕

$P_n = P_{n-1} + \frac{1}{4}X_n$  を取引利益の式に代入すると

$$\begin{aligned} R_n &= (1 - P_n)X_n \\ &= -\frac{1}{4}X_n^2 + (1 - P_{n-1})X_n \\ &= -\frac{1}{4}\{X_n - 2(1 - P_{n-1})\}^2 + (1 - P_{n-1})^2 \end{aligned}$$

となる。従って、取引利益が最大となるのは

$$X_n = 2 - 2P_{n-1}$$

のときである。これより

$$\begin{aligned} P_n &= P_{n-1} + \frac{1}{4}X_n \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P_{n-1} \end{aligned}$$

とわかる。

〔3〕

〔2〕より  $P_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P_{n-1}$  を変形すると

$$\begin{aligned} P_n - 1 &= \frac{1}{2}(P_{n-1} - 1) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n (P_0 - 1) \\ &= -\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

となるので、

$$P_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

とわかる。従って

$$\begin{aligned} X_n &= 2 - 2P_{n-1} \\ &= \frac{1}{2^{n-2}} \\ R_n &= (1 - P_n)X_n \\ &= \left\{1 - \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\right\} \cdot \frac{1}{2^{n-2}} \\ &= \frac{1}{2^{2n-2}} \end{aligned}$$

となる。

〔4〕

累計取引利益は

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n R_i &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^{2i-2}} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{4^{i-1}} \\ &= \frac{1 \cdot \left\{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ &= \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \cdot 2^{2-2n} \end{aligned}$$

となる。

〔5〕

$P_n = 1 - \frac{1}{2^n}$  より

$$1 - P_n \leq 0.01$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2^n} \leq 0.01$$

$$\Leftrightarrow 100 \leq 2^n$$

となる。ここで

$$2^6 = 56, 2^7 = 128$$

より求める  $n$  は 7 である。

### III

[1]

$x$  を2乗すると

$$\begin{aligned} x^2 &= (\sin \theta + \cos \theta)^2 \\ &= \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= 1 + \sin 2\theta \end{aligned}$$

となる。これより、 $y$  は

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 1 + 2ax + a^3 \\ &= x^2 + 2ax + a^3 - 1 \end{aligned}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad y = x^2 + 2ax + a^3 - 1$$

[2]

$x$  について三角関数の合成をすると

$$x = \sqrt{2} \sin \left( \theta + \frac{\pi}{4} \right)$$

となる。ここで、 $0 \leq \theta \leq \pi$  より

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5\pi}{4}$$

となるので、 $x$  のとりうる範囲は

$$-1 \leq x \leq \sqrt{2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad -1 \leq x \leq \sqrt{2}$$

[3]

$y$  の関数は

$$y = (x+a)^2 + a^3 - a^2 - 1$$

と表せるので、軸は  $x = -a$  となる。

[1]  $-a \leq -1$  のとき

つまり  $a \geq 1$  のときである。このとき  $x = -1$  で  $y$  は最小値

$$\begin{aligned} m(a) &= (-1+a)^2 + a^3 - a^2 - 1 \\ &= a^3 - 2a \end{aligned}$$

となる。

[2]  $-a \geq \sqrt{2}$  のとき

つまり  $a \leq -\sqrt{2}$  のときである。このとき  $x = \sqrt{2}$  で  $y$  は最小値

$$\begin{aligned} m(a) &= (\sqrt{2}+a)^2 + a^3 - a^2 - 1 \\ &= a^3 + 2\sqrt{2}a + 1 \end{aligned}$$

となる。

[3]  $\sqrt{2} \geq -a \geq -1$  のとき

つまり  $-\sqrt{2} \leq a \leq 1$  のときである。このとき  $x = -a$  で  $y$  は最小値

$$m(a) = a^3 - a^2 - 1$$

となる。

以上[1]から[3]より

$$m(a) = \begin{cases} a^3 - 2a & (a \geq 1 \text{ のとき}) \\ a^3 - a^2 - 1 & (-\sqrt{2} \leq a \leq 1 \text{ のとき}) \\ a^3 + 2\sqrt{2}a + 1 & (a \leq -\sqrt{2} \text{ のとき}) \end{cases}$$

とわかる。

$$(\text{答}) \quad m(a) = \begin{cases} a^3 - 2a & (a \geq 1 \text{ のとき}) \\ a^3 - a^2 - 1 & (-\sqrt{2} \leq a \leq 1 \text{ のとき}) \\ a^3 + 2\sqrt{2}a + 1 & (a \leq -\sqrt{2} \text{ のとき}) \end{cases}$$

[4]

$m(a)$  を  $a$  で微分すると

$$\frac{dm(a)}{da} = \begin{cases} 3 \left( a - \sqrt{\frac{2}{3}} \right) \left( a + \sqrt{\frac{2}{3}} \right) & (a \geq 1 \text{ のとき}) \\ 3a \left( a - \frac{2}{3} \right) & (-\sqrt{2} \leq a \leq 1 \text{ のとき}) \\ 3 \left( a - \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{2} \right) \left( a + \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{2} \right) & (a \leq -\sqrt{2} \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。ここで

$$\pm \sqrt{\frac{2}{3}} \leq 1$$

$$\pm \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{2} \geq -\sqrt{2}$$

より極値となるのは  $a = 0, \frac{2}{3}$  である。よって、増減表は下のようになる。

|                    |            |    |            |                  |            |
|--------------------|------------|----|------------|------------------|------------|
| $a$                | ...        | 0  | ...        | $\frac{2}{3}$    | ...        |
| $\frac{dm(a)}{da}$ | +          | 0  | -          | 0                | +          |
| $m(a)$             | $\nearrow$ | -1 | $\searrow$ | $-\frac{31}{27}$ | $\nearrow$ |

これより極大値  $m(0) = -1$ 、極小値  $m\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{31}{27}$  とわかる。

$$(\text{答}) \quad \text{極大値 } m(0) = -1, \text{ 極小値 } m\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{31}{27}$$