

I

【解答】

ア	142	イ	1692	ウ	3456
---	-----	---	------	---	------

エ	$4x-9$	オ	$\frac{4\sqrt{17}}{17}$	カ	$\frac{4\sqrt{85}}{17}$
---	--------	---	-------------------------	---	-------------------------

キ	0	ク	3	ケ	2
---	---	---	---	---	---

コ	-2
---	----

【解説】

[1]

x, y に関して、それぞれ分母を有理化すると、

$$\begin{aligned}x &= \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} \\&= \frac{(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2}{7-5} \\&= \frac{1}{2}(7+5+2\sqrt{35}) \\&= 6+\sqrt{35}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y &= \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} \\&= \frac{(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2}{7-5} \\&= \frac{1}{2}(7+5-2\sqrt{35}) \\&= 6-\sqrt{35}\end{aligned}$$

となる。よって

$$x+y=12$$

である。ここで、

$$xy = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} = 1$$

$$\therefore x = \frac{1}{y}, y = \frac{1}{x}$$

より、

$$\begin{aligned}x^2+y^2 &= (x+y)^2 - 2xy \\&= 12^2 - 2 \\&= 142\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^3+y^3 &= (x+y)(x^2-xy+y^2) \\&= 12(142-1) \\&= 1692\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(x+\frac{1}{x}\right)^3 + \left(y+\frac{1}{y}\right)^3 &= (x+y)^3 + (y+x)^3 \\&= 2 \cdot 12^3 \\&= 3456\end{aligned}$$

となる。

[2]

放物線 F の方程式を x で微分すると、

$$y' = 2x - 2$$

であるから、点 P における放物線 F の接線 l の傾きは、

$$2 \cdot 3 - 2 = 4$$

となる。また、点 P の y 座標を求めると、

$$y = 3^2 - 2 \cdot 3 = 3$$

であるから、接線 l の方程式は

$$\begin{aligned}y &= 4(x-3)+3 \\&= 4x-9\end{aligned}$$

となる。ここで、放物線の方程式を変形すると、

$$\begin{aligned}y &= x^2 - 2x \\&= (x-1)^2 - 1\end{aligned}$$

となることから、放物線の頂点 R の座標は、

$$R(1, -1)$$

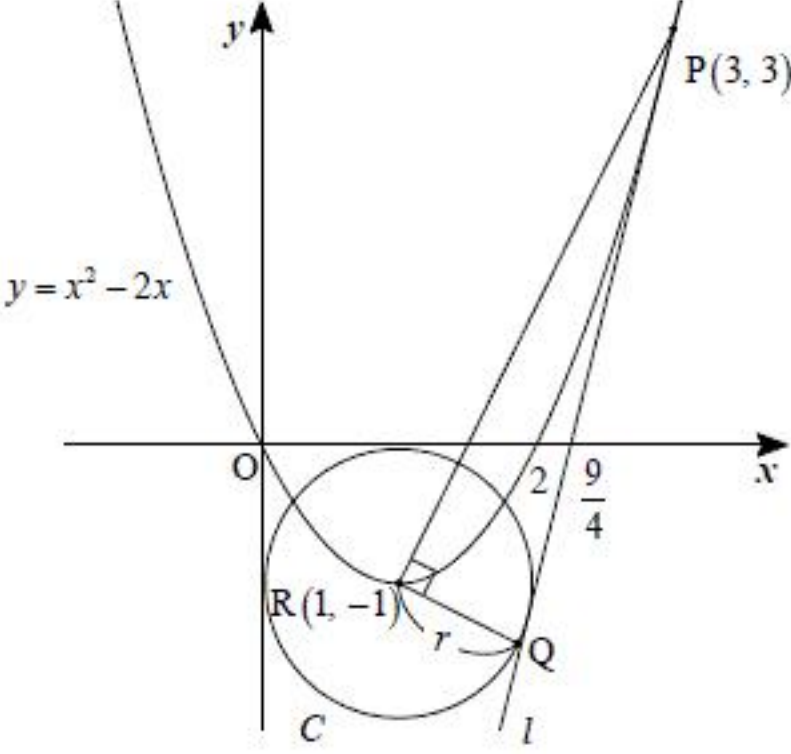
とわかる。ここで、点 P を中心とする円 C が直線 l と接しているとき、円 C の半径を r とおくと、これは点 R と直線 l の距離に等しい。したがって、接線 l の方程式が

$$l: 4x - y - 9 = 0$$

と変形できることから、点と直線の距離の公式より、

$$\begin{aligned}r &= \frac{|4+1-9|}{\sqrt{4^2+1^2}} \\&= \frac{4}{\sqrt{17}} \\&= \frac{4\sqrt{17}}{17}\end{aligned}$$

となる。



点 Q を円 C の円周上を動く点とすると、辺 QR の長さは常に一定値 r となることから、三角形 PQR の面積がもっとも大きくなるのは、上図のように QR と PR が直交する場合である。

ここで、辺 PR の長さは

$$\begin{aligned}PR &= \sqrt{(3-1)^2 + (3+1)^2} \\&= 2\sqrt{5}\end{aligned}$$

であるから、もっとも大きい面積は

$$\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \frac{4\sqrt{17}}{17} = \frac{4\sqrt{85}}{17}$$

である。

[3]

$f(x)$ の導関数を求めると

$$f'(x) = -3x^2 + 2ax + b$$

である。 $x=1$ のとき、関数 $f(x)$ が極大値を取ることから、

$$\begin{aligned}f'(1) &= -3+2a+b \\&= 0\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 2a+b=3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

を満たす。一方、関数 $y=f(x)$ のグラフが原点に関して対称であることから、

$$\begin{aligned}f(-x) &= -f(x) \\&\Leftrightarrow -(-x)^3 + a(-x)^2 + b(-x) = -(-x^3 + ax^2 + bx) \\&\Leftrightarrow x^3 + ax^2 - bx = x^3 - ax^2 - bx \\&\Leftrightarrow 2ax^2 = 0\end{aligned}$$

となる。ここで、この方程式が任意の x について成り立つことから

$$a=0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。①、②より

$$\begin{cases} a=0 \\ b=3 \end{cases}$$

となり、これを $f'(x)$ に代入して変形すると、

$$\begin{aligned}f'(x) &= -3x^2 + 3 \\&= -3(x^2 - 1) \\&= -3(x+1)(x-1)\end{aligned}$$

となるので、以下の増減表を得る。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$

よって、 $f(x)$ の極大値は2、極小値は-2である。

II

〔解答〕

サ	3	シ	66	ス	78
---	---	---	----	---	----

セ	$\frac{5}{2}$	ソ	$-\frac{1}{3}$	タ	$\frac{15}{4}$
---	---------------	---	----------------	---	----------------

〔解説〕

〔1〕

与えられた式(1)を Z の式として書き換えると、

$$Z = -aX + Y - b$$

であるから、 Q を計算すると、

$$\begin{aligned} Q &= (-a \cdot 1 + 2 - b)^2 + (-a \cdot 2 + 5 - b)^2 + (-a \cdot 3 + 7 - b)^2 \\ &= a^2(1 + 4 + 9) + (4 + 25 + 49) + 3b^2 - a(4 + 20 + 42) + ab(2 + 4 + 6) - b(4 + 10 + 14) \\ &= 14a^2 + 3b^2 + 12ab - 66a - 28b + 78 \end{aligned}$$

となる。

〔2〕

〔1〕で求めた Q の式を整理すると、

$$\begin{aligned} Q &= 14a^2 + 3b^2 + 12ab - 66a - 28b + 78 \\ &= 3b^2 + (12a - 28)b + 14a^2 - 66a + 78 \\ &= 3\left(b + \frac{6a - 14}{3}\right)^2 - \frac{(6a - 14)^2}{3} + 14a^2 - 66a + 78 \\ &= 3\left(b + \frac{6a - 14}{3}\right)^2 + 2a^2 - 10a + \frac{38}{3} \\ &= 3\left(b + \frac{6a - 14}{3}\right)^2 + 2\left(a - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{5^2}{2} + \frac{38}{3} \\ &= 3\left(b + \frac{6a - 14}{3}\right)^2 + 2\left(a - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{cases} a = \frac{5}{2} \\ b = -\frac{6a - 14}{3} \end{cases}$$

のとき、 Q は最小となる。これを整理すると、

$$\begin{cases} a = \frac{5}{2} \\ b = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

となる。

〔3〕

〔2〕で求めた結果を元の式に代入すると、

$$Y = \frac{5}{2}X - \frac{1}{3} + Z$$

となるから、 Y の増分 ΔY は X の増分 ΔX に対して

$$\Delta Y = \frac{5}{2} \Delta X$$

という関係を満たす。よって、1週間あたりの収入が1.5万円増えた場合、幸福度は

$$\Delta Y = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{4}$$

だけ向上すると予測できる。

III

[1]

3枚のカードの並べ方のうち、どのカードにも「めぐり会い」が起こらない並べ方は

$$N_2N_3N_1, N_3N_1N_2$$

の2通りである。3枚のカードの並べ方の総数は

$$\begin{aligned} {}_3P_3 &= 3! \\ &= 6 \end{aligned}$$

であるから、「めぐり会い」が起こる確率は、余事象の考え方をを用いて

$$1 - \frac{2}{6} = \frac{2}{3}$$

となる。

(答) $\frac{2}{3}$

[2]

どのカードにも「めぐり会い」が起こらない並び方のうち、左から1番目のカードが N_2 であるような並べ方は

$$N_2N_1N_4N_3, N_2N_4N_1N_3, N_2N_3N_4N_1$$

の3通りである。

(答) $N_2N_1N_4N_3, N_2N_4N_1N_3, N_2N_3N_4N_1$

[3]

[2]と同様に、 N_2 を左から1番目に並べて考える。次のように場合分けを行い、どのような並べ方が存在するかを調べる。

[1] N_1 を2番目に並べる場合

このとき、左から3, 4, 5番目に、 N_3, N_4, N_5 の3枚のカードを「めぐり会い」が起こらないように並べるときの総数を考えればよい。[1]の結果より、3枚のカードで「めぐり会い」が起こらないような並べ方は2通り存在する。

[2] N_1 を2番目に並べない場合

N_1 を N_2' と表し、 N_2' が左から2番目にあるとき「めぐり会い」が起きたとする。このと

き、左から2, 3, 4, 5番目に、 N_2', N_3, N_4, N_5 の4枚のカードを「めぐり会い」が起こらな

いように並べるときの総数を考えればよい。[2]の結果を利用すると、4枚のカードで「めぐり会い」が起こらないような並べ方は

$$3 \cdot 3 = 9 \text{ 通り}$$

存在する。

以上[1], [2]の場合分けにおける並べ方は、 N_k ($k=3, 4, 5$)を左から1番目に並べ、また N_1 を k 番目に並べるか、あるいは並べないか、といった場合分けに関しても同様に成り立つ。よって、 N_1 から N_5 までの5枚のカードを並べるとき、どのカードにも「めぐり会い」が起こらない並び方は

$$(2+9) \times 4 = 44 \text{ 通り}$$

ある。

(答) 44通り

[4]

[3]と同様に考えると、6枚のカードに「めぐり会い」が起こらないように並べる方法は、4枚のカードに「めぐり会い」が起こらない並べ方と5枚のカードに「めぐり会い」が起こらない並べ方を考え、

$$(9+44) \times 5 = 265 \text{ 通り}$$

存在すると分かる。ここで、6枚のカードの並べ方の総数は

$$\begin{aligned} {}_6P_6 &= 6! \\ &= 720 \end{aligned}$$

通りであるから、求める確率は

$$\frac{265}{720} = \frac{53}{144}$$

である。

(答) $\frac{53}{144}$