

〔解答〕

ア	$2a$	イ	$\sqrt{1-a^2}$	ウ	$\frac{4a}{\sqrt{1+3a^2}}$	エ	$\frac{\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1+3a^2}}$	オ	$\sqrt{1+3a^2}$
---	------	---	----------------	---	----------------------------	---	--------------------------------------	---	-----------------

カ	$\frac{1+3a^2}{\sqrt{1+15a^2}}$	キ	$\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$	ク	$\frac{4}{5}$	ケ	$0, \pm 1$	コ	1
---	---------------------------------	---	-------------------------	---	---------------	---	------------	---	---

〔解説〕

線分 PH の長さ h は点 $P(2\cos t, \sin t)$ と直線 $ax + \sqrt{1-a^2}y = 0$ の距離に一致するから

$$h = \frac{|a \cdot 2\cos t + \sqrt{1-a^2} \cdot \sin t|}{\sqrt{a^2 + (\sqrt{1-a^2})^2}}$$

$$= |2a\cos t + \sqrt{1-a^2}\sin t|$$

となる。ここで

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{3a^2+1}} \\ \sin \alpha = \frac{2a}{\sqrt{3a^2+1}} \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

を満たす α を用いて

$$h = |\sqrt{3a^2+1}\sin(t+\alpha)|$$

となる。ここで、 $-1 \leq a \leq 1$ であることから α は $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ を満たす。また、 $0 \leq t \leq 2\pi$ であることから

$$(-\frac{\pi}{2} \leq) \alpha \leq t + \alpha \leq 2\pi + \alpha (\leq \frac{5}{2}\pi)$$

であり、このとき

$$h = |\sqrt{3a^2+1}\sin(t+\alpha)| \leq \sqrt{3a^2+1}$$

となるから、 h が最大値 $\sqrt{3a^2+1}$ をとるのは

$$t + \alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{3\pi}{2} - \alpha$$

となるときであり、①より

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha = \frac{2a}{\sqrt{3a^2+1}}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha = \frac{\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{3a^2+1}}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha = -\frac{2a}{\sqrt{3a^2+1}}$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha = -\frac{\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{3a^2+1}}$$

であることから、このときの点 P の座標は

$$\left(\pm\frac{4a}{\sqrt{3a^2+1}}, \pm\frac{\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{3a^2+1}}\right) \text{ (複合同順)}$$

となる。このとき、線分 OP の長さは

$$OP = \frac{\sqrt{1+15a^2}}{\sqrt{3a^2+1}}$$

である。また、点 H が点 P から原点を通る直線 $ax + \sqrt{1-a^2}y = 0$ に下ろした垂線の足であることから

$$\cos \theta_0 = \frac{PH}{OP}$$

であり、 $h = \sqrt{3a^2+1}$ であるから

$$\cos \theta_0 = \frac{3a^2+1}{\sqrt{1+15a^2}}$$

となる。これを $f(a)$ とおくと

$$f'(a) = \frac{6a \cdot \sqrt{1+15a^2} - (3a^2+1) \cdot \frac{30a}{2\sqrt{1+15a^2}}}{1+15a^2}$$

$$= \frac{9a(\sqrt{5a+1})(\sqrt{5a-1})}{(1+15a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

となるから、 $-1 \leq a \leq 1$ における関数 $f(a)$ 増減表は以下のようになる。

a	-1	...	$-\frac{1}{\sqrt{5}}$	...	0	...	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	...	1
$f'(a)$		-	0	+	0	-	0	+	
$f(a)$	1	$\searrow$	$\frac{4}{5}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{4}{5}$	$\nearrow$	1

よって、関数 $f(a)$ は

$$a = \pm\frac{1}{\sqrt{5}} \text{ のとき最小値 } \frac{4}{5}$$

をとり

$$a = 0, \pm 1 \text{ のとき、最大値 } 1$$

をとる。

II

【解答】

サ	0	シ	1	ス	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	セ	$\sqrt{1-x^2}$	ソ	$\sqrt{1-x^2}-1$
---	---	---	---	---	--------------------------	---	----------------	---	------------------

タ	$\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1$	チ	$\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{1}{2}$	ツ	$\frac{\pi}{16}+\frac{3\sqrt{3}}{16}-\frac{1}{2}$
---	---------------------------------------	---	---	---	---

【解説】

〔1〕

$y = \sin x$ を満たす x, y の値について $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ においては x, y の値は一対一対応するから、

$0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ において $y = \sin x$ は逆関数を定義することができる。 $F(x) = \sin x$ ($0 \leq x < \frac{\pi}{2}$) とおくと

$$0 \leq F(x) < 1$$

であるから、関数 $f(x) = F^{-1}(x)$ の定義域は関数 $F(x)$ の値域に対応し、 $0 \leq x < 1$ となる。このもとで

$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ \Leftrightarrow x &= \sin y \end{aligned}$$

の両辺を x で微分すると

$$1 = \cos y \cdot \frac{dy}{dx}$$

となるから

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{dy}{dx} \\ &= \frac{1}{\cos y} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

である。さらに、このとき

$$\begin{aligned} \int x f'(x) dx &= \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left\{ -\frac{1}{2} (1-x^2)' \right\} dx \\ &= -\sqrt{1-x^2} + C \end{aligned}$$

であるから、部分積分法を用いると

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= x f(x) - \int x f'(x) dx \\ &= x f(x) + \sqrt{1-x^2} + C \end{aligned}$$

となる。

〔2〕

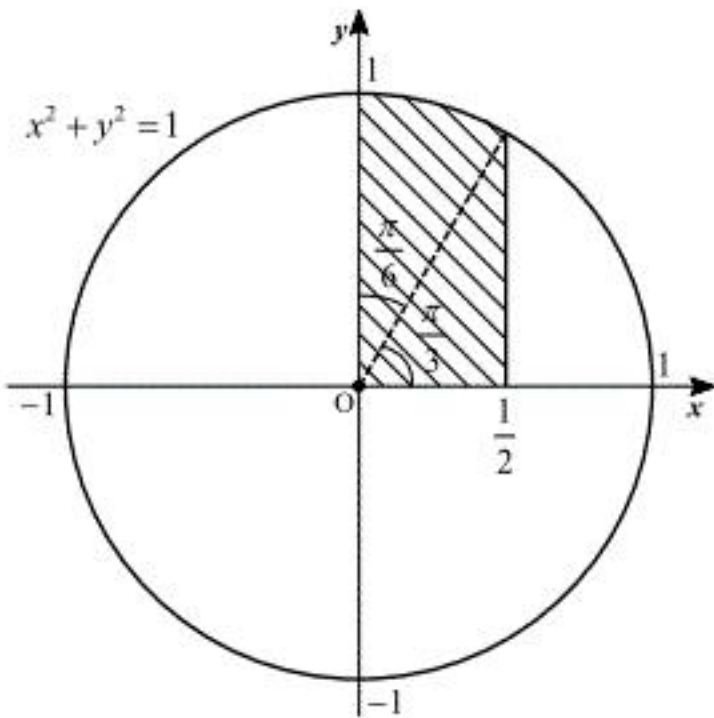
〔1〕の結果を用いて

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^x f(t) dt \\ &= \left[t f(t) + \sqrt{1-t^2} \right]_0^x \\ &= x f(x) + \sqrt{1-x^2} - 1 \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{1}$$

となり、とくに

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right) + \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} - 1 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \\ &= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{aligned}$$

である。ここで、 $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} dx$ は下図の斜線部の面積に等しい。



よって

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} dx &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

となり

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{1-x^2} - 1 \right) dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} dx - \int_0^{\frac{1}{2}} 1 dx \\ &= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8} - \left[x \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。 $g(x) = \int_0^x f(t) dt$ より

$$f(x) = g'(x)$$

であるから、①より部分積分法を用いて

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} g(x) dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x f(x) + \sqrt{1-x^2} - 1 \right) dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} x g'(x) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{1-x^2} - 1 \right) dx \\ &= \left[x g(x) \right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} g(x) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{1-x^2} - 1 \right) dx \end{aligned}$$

となり、よって

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} g(x) dx &= \frac{1}{2} \left\{ \left[x g(x) \right]_0^{\frac{1}{2}} + \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{1-x^2} - 1 \right) dx \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} g\left(\frac{1}{2}\right) - 0 \cdot g(0) + \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{1-x^2} - 1 \right) dx \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right) + \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{2} \right\} \\ &= \frac{\pi}{16} + \frac{3\sqrt{3}}{16} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

III

【解答】

テ	$\frac{4}{3}(4^n-1)$	ト	$\frac{3(r^2-1)}{(2r-1)^2}$	ナ	2	ニ	1
---	----------------------	---	-----------------------------	---	---	---	---

ヌ	$\frac{n(2n^2+9n+13)}{6}$	ネ	$2^{n+1}\cdot n$	ノ	9
---	---------------------------	---	------------------	---	---

【解説】

〔1〕

$a_n=2^n$ 、 $b_n=r^n$ ($r>1$) のとき

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n (a_k)^2 \\ &= \sum_{k=1}^n 4^k \\ &= 4\cdot\frac{4^n-1}{4-1} \\ &= \frac{4}{3}(4^n-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^n (b_k)^2 \\ &= \sum_{k=1}^n (r^2)^k \\ &= r^2\cdot\frac{(r^2)^n-1}{r^2-1} \ (\because r>1) \\ &= \frac{r^2(r^{2n}-1)}{r^2-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{k=1}^n a_k b_k \\ &= \sum_{k=1}^n (2r)^k \\ &= 2r\cdot\frac{(2r)^n-1}{2r-1} \ (\because 2r>1) \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \frac{(U_n)^2}{S_n T_n} &= \frac{\left\{2r\cdot\frac{(2r)^n-1}{2r-1}\right\}^2}{\frac{4}{3}(4^n-1)\cdot\frac{r^2(r^{2n}-1)}{r^2-1}} \\ &= \frac{3(r^2-1)\{(2r)^n-1\}^2}{(2r-1)^2(4^n-1)(r^{2n}-1)} \\ &= \frac{3(r^2-1)\left\{1-\frac{1}{(2r)^n}\right\}^2}{(2r-1)^2\left(1-\frac{1}{4^n}\right)\left(1-\frac{1}{r^{2n}}\right)} \end{aligned}$$

となる。よって、 $r>1$ であるとき

$$\begin{aligned} \lim_{n\rightarrow\infty}\frac{(U_n)^2}{S_n T_n} &= \frac{3(r^2-1)(1-0)^2}{(2r-1)^2(1-0)(1-0)} \\ &= \frac{3(r^2-1)}{(2r-1)^2} \end{aligned}$$

となる。ここで、この極限値を $f(r)$ とおくと

$$f(r)=\frac{3(r^2-1)}{(2r-1)^2}$$

となり

$$\begin{aligned} f'(r) &= \frac{6r(2r-1)^2-4(2r-1)\cdot 3(r^2-1)}{(2r-1)^4} \\ &= \frac{6\{r(2r-1)-2(r^2-1)\}}{(2r-1)^3} \\ &= -\frac{6(r-2)}{(2r-1)^3} \end{aligned}$$

である。よって、 $r>1$ における関数 $f(r)$ の増減表は以下のようになる。

r	1	…	2	…
$f'(r)$		+	0	−
$f(r)$			1	

以上より、 $f(r)$ は

$r=2$ のとき、最大値1

をとる。

〔2〕

$a_n=2^n$ 、 $b_n=n+1$ のとき、〔1〕と同様に

$$S_n=\frac{4}{3}(4^n-1)$$

であり

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^n (b_k)^2 \\ &= \sum_{k=1}^n (k+1)^2 \\ &= \sum_{k=1}^n (k^2+2k+1) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n \\ &= \frac{n(2n^2+9n+13)}{6} \end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{k=1}^n a_k b_k \\ &= \sum_{k=1}^n 2^k(k+1) \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} U_n &= 2U_n-U_n \\ &= \sum_{k=1}^n 2^{k+1}(k+1)-\sum_{k=1}^n 2^k(k+1) \\ &= \sum_{k=1}^n 2^{k+1}(k+1)-\sum_{k=0}^{n-1} 2^{k+1}(k+2) \\ &= 2^{n+1}(n+1)+\sum_{k=1}^{n-1} 2^{k+1}(k+1)-\left\{2\cdot 2+\sum_{k=1}^{n-1} 2^{k+1}(k+2)\right\} \\ &= 2^{n+1}(n+1)-4-\sum_{k=1}^{n-1} 2^{k+1} \\ &= 2^{n+1}(n+1)-4-4\cdot\frac{2^{n-1}-1}{2-1} \\ &= 2^{n+1}\cdot n \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} n\cdot\frac{(U_n)^2}{S_n T_n} &= n\cdot\frac{(2^{n+1}\cdot n)^2}{\frac{4}{3}(4^n-1)\cdot\frac{n(2n^2+9n+13)}{6}} \\ &= \frac{18}{\left(1-\frac{1}{4^n}\right)\left(2+\frac{9}{n}+\frac{13}{n^2}\right)} \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned} \lim_{n\rightarrow\infty} n\cdot\frac{(U_n)^2}{S_n T_n} &= \frac{18}{(1-0)(2+0+0)} \\ &= 9 \end{aligned}$$

である。

IV

【解答】

ハ	$\frac{4}{9}$	ヒ	$\frac{8}{81}$	フ	$\frac{128}{729}$	ヘ	$\frac{896}{6561}$	ホ	$\frac{3344}{6561}$
---	---------------	---	----------------	---	-------------------	---	--------------------	---	---------------------

マ	0	ミ	$\frac{2(50-k)}{51+k}$	ム	34
---	---	---	------------------------	---	----

【解説】

[1]

サイコロを投げたとき、各目の出方は同様に確からしいとする。3 以上の目が出て正の方向に 1 移動する事象を X 、1, 2 の目が出て負の方向に 1 移動する事象を Y とし、これらの事象が起こる確率をそれぞれ $p(X)$ 、 $p(Y)$ と表すこととすると

$$p(X) = \frac{2}{3}, p(Y) = \frac{1}{3}$$

となる。3 回目の試行で点 A の座標が 1 となるのは、事象 X が 2 回、事象 Y が 1 回起こるときであるから、その確率は

$${}_3C_2 \{p(X)\}^2 \{p(Y)\}^1 = 3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{4}{9}$$

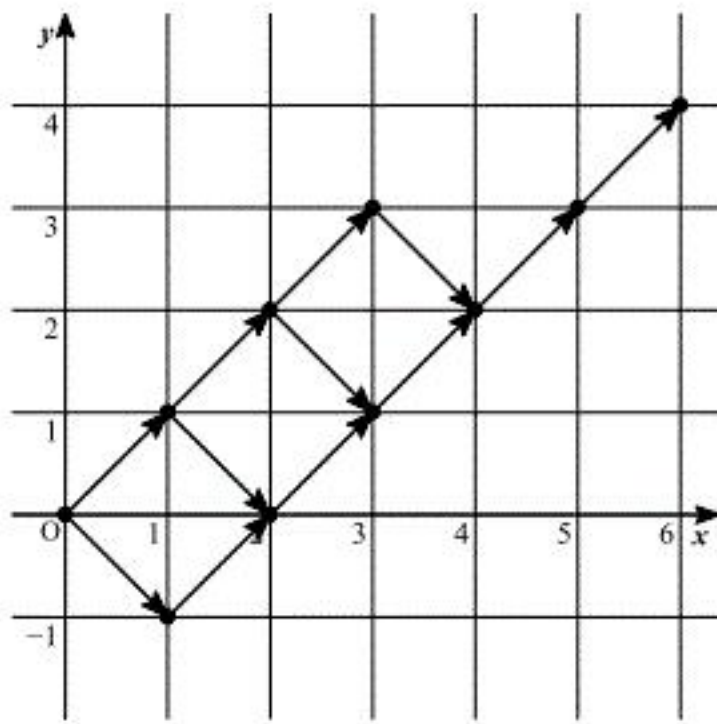
となる。また、3 回目の試行で点 A の座標が 1 となり、かつ 6 回目の試行で点 A が原点にあるのは、3 回目の試行で点 A の座標が 1 となり、かつその後の 3 回の試行で事象 X が 1 回、事象 Y が 2 回起こるときであるから、その確率は

$$\frac{4}{9} \cdot {}_3C_1 \{p(X)\}^1 \{p(Y)\}^2 = \frac{4}{9} \cdot 3 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{81}$$

となる。

[2]

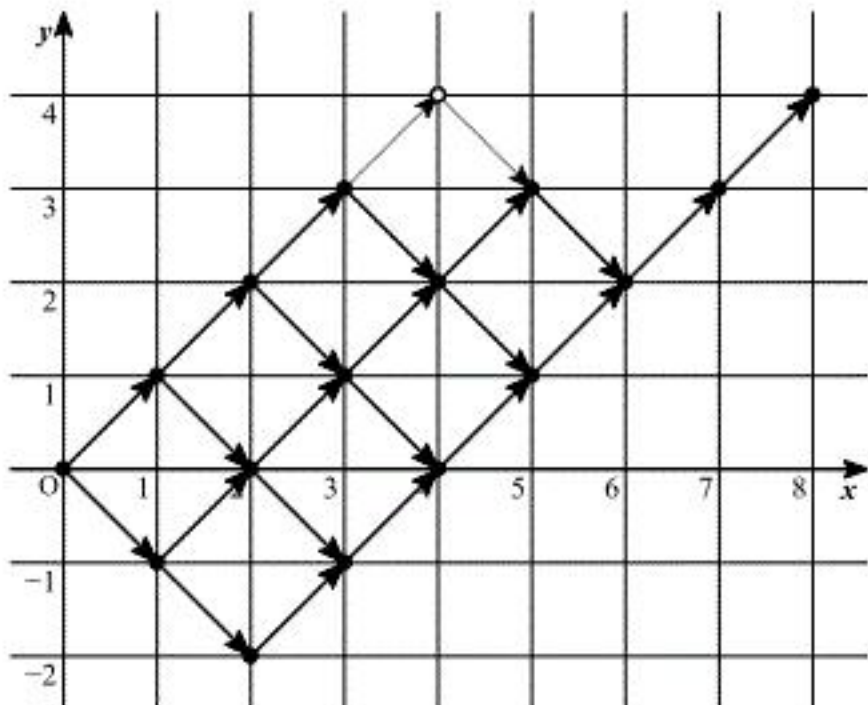
xy 平面上において、 x 軸に試行回数、 y 軸に点 A の座標をとることとする。さらに、点 A の座標変化を矢印で表すこととする。また、 $n-1$ 回目までの試行では点 A の座標が 4 より小さく、 n 回目の試行で点 A の座標が初めて 4 になるような事象を Z_n と表すこととする。このとき、 Z_6 を満たすような点 A の座標変化は下図のようになる。



よって、このようになるのは初めの 4 回の試行で事象 X が 3 回、事象 Y が 1 回起こり、かつその後事象 X が 2 回起こるときであるから、そのときの確率 $P(6)$ は

$$\begin{aligned} P(6) &= {}_4C_3 \{p(X)\}^3 \{p(Y)\}^1 \cdot \{p(X)\}^2 \\ &= 4 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ &= \frac{128}{729} \end{aligned}$$

である。また、 Z_8 を満たすような点 A の座標変化は下図の実線のようになる。



よって、このようになるのは初めの 6 回の試行で事象 X が 4 回、事象 Y が 2 回起こる場合のうち上図の破線のように移動する場合を除いた事象が起こり、かつその後事象 X が 2 回起こるときであるから、そのときの確率 $P(8)$ は

$$\begin{aligned} P(8) &= ({}_6C_4 - 1) \{p(X)\}^4 \{p(Y)\}^2 \cdot \{p(X)\}^2 \\ &= (15 - 1) \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ &= \frac{896}{6561} \end{aligned}$$

である。さらに、 Z_4 は事象 X が 4 回起こる場合であるから、このときの確率 $P(4)$ は

$$\begin{aligned} P(4) &= \{p(X)\}^4 \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^4 \\ &= \frac{16}{81} \end{aligned}$$

であり、 $1 \leq n \leq 3$ のときと n が奇数のときは n 回目の試行で点 A の座標が 4 となることはないから

$$P(n) = 0$$

である。以上より、8 回目までの試行で点 A の座標が少なくとも 1 回 4 となる確率は、すべての自然数 n に対して Z_n が互いに独立であることから

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^8 P(n) &= \frac{16}{81} + \frac{128}{729} + \frac{896}{6561} \\ &= \frac{3344}{6561} \end{aligned}$$

となる。

[3]

100 回の試行において事象 X が起こった回数を x (x は非負の整数) とおくと、事象 Y が起こった回数は $100-x$ となるから、100 回目の試行で点 A の座標は

$$x - (100 - x) = 2x - 100$$

である。このとき、 x は整数であるから $2x-100$ は偶数であり、整数 k に対して $2k+1$ は奇数であるから、点 A の座標が $2k+1$ となることはなく

$$Q(2k+1) = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。また

$$\begin{aligned} 2x - 100 &= 2k \\ \Leftrightarrow x &= 50 + k \end{aligned}$$

であるから、 $-50 \leq k < 50$ を満たす整数 k に対して、点 A の座標が $2k$ となるのは、事象 X が $50+k$ 回、事象 Y が $50-k$ 回起こるときである。よって、このようになる確率 $Q(2k)$ は

$$\begin{aligned} Q(2k) &= {}_{100}C_{50+k} \{p(X)\}^{50+k} \{p(Y)\}^{50-k} \\ &= \frac{100!}{(50+k)!(50-k)!} \left(\frac{2}{3}\right)^{50+k} \left(\frac{1}{3}\right)^{50-k} \end{aligned}$$

となり、 $-50 \leq k < 50$ を満たす整数 k に対して $Q(2k+2)$ は

$$Q(2k+2) = \frac{100!}{(51+k)!(49-k)!} \left(\frac{2}{3}\right)^{51+k} \left(\frac{1}{3}\right)^{49-k}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \frac{Q(2k+2)}{Q(2k)} &= \frac{\frac{100!}{(51+k)!(49-k)!} \left(\frac{2}{3}\right)^{51+k} \left(\frac{1}{3}\right)^{49-k}}{\frac{100!}{(50+k)!(50-k)!} \left(\frac{2}{3}\right)^{50+k} \left(\frac{1}{3}\right)^{50-k}} \\ &= \frac{2(50-k)}{51+k} \end{aligned}$$

であり

$$-50 \leq k \leq 16 \text{ のとき, } \frac{Q(2k+2)}{Q(2k)} > 1 \Leftrightarrow Q(2k+2) > Q(2k)$$

$$17 \leq k \leq 49 \text{ のとき, } \frac{Q(2k+2)}{Q(2k)} < 1 \Leftrightarrow Q(2k+2) < Q(2k)$$

となるから

$$0 < Q(-100) < Q(-98) < \cdots < Q(32) < Q(34) > Q(36) > \cdots > Q(98) > Q(100) > 0$$

となり、これと①より $Q(m)$ は

$$m = 34$$

において最大値をとる。