

【解答】			
ア	3, 9	イ	204
エ	$2r \sin \theta$	オ	$\frac{a^2}{2r^2}-1$
キ	8	カ	$\frac{8\sqrt{5}}{5}$
ク	0	ケ	$\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$
		コ	$\frac{3+\sqrt{5}}{8}$

【解説】

〔1〕

等式

$$\log_y\left(x^3+6x^2-9x-34\right)-\log_y\left(x+2\right)=2\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{1}$$

について、底と真数の条件より

$$y>0,\,y\neq1,\,x^3+6x^2-9x-34>0,\,x+2>0\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{2}$$

が成り立つ。このもとで、①は

$$\begin{aligned}\log_y\left(x^3+6x^2-9x-34\right)-\log_y\left(x+2\right)&=2\\ \Leftrightarrow\log_y\left(x+2\right)\left(x^2+4x-17\right)-\log_y\left(x+2\right)&=2\\ \Leftrightarrow\log_y\left(x^2+4x-17\right)&=2\\ \Leftrightarrow x^2+4x-17&=y^2\\ \Leftrightarrow\left(x+y+2\right)\left(x-y+2\right)&=21\end{aligned}$$

となる。ここで x, y は正の整数であるから、 $x+y+2, x-y+2$ がともに整数であり、 $x+y+2>x-y+2, x+y+2>0$ となるから、①を満たす正の整数 x, y の組は

$$\begin{aligned}\left(x+y+2,\,x-y+2\right)&=\left(21,\,1\right),\,\left(7,\,3\right)\\ \Leftrightarrow\left(x,\,y\right)&=\left(9,\,10\right),\,\left(3,\,2\right)\end{aligned}$$

となり、これらはいずれも②を満たす。よって、①が成り立つような x の値は $x=3, 9$ である。

〔2〕(a)

[1] 取り出した 4 個の玉の色がすべて異なるとき

玉の色の組み合わせの選び方は1通りに決まり、その 4 個の玉を直線上に並べる方法は

4!通りあるから、このときの場合の数は

$$1\times4!=24\text{通り}$$

である。

[2] 取り出した 4 個の玉のうち 2 個が同じ色であり、残りの 2 個が異なる色であるとき

玉の色の組み合わせの選び方は ${}_4\text{C}_1\times{}_3\text{C}_2$ 通りあり、その 4 個の玉を直線上に並べる方法

は ${}_4\text{C}_2\times2!$ 通りあるから、このときの場合の数は

$${}_4\text{C}_1\times{}_3\text{C}_2\times{}_4\text{C}_2\times2!=144\text{通り}$$

である。

[3] 取り出した 4 個の玉のうち 2 個が同じ色であり、残りの 2 個も同じ色であるとき

玉の色の組み合わせの選び方は ${}_4\text{C}_2$ 通りあり、その 4 個の玉を直線上に並べる方法は

${}_4\text{C}_2\times{}_2\text{C}_2$ 通りあるから、このときの場合の数は

$${}_4\text{C}_2\times{}_4\text{C}_2\times{}_2\text{C}_2=36\text{通り}$$

である。

以上、[1], [2], [3]の場合は互いに排反であるから、求める場合の数は全部で

$$24+144+36=204\text{通り}$$

である。

(b)

[1] 取り出した 4 個の玉の色がすべて異なるとき

玉の色の組み合わせの選び方は1通りに決まり、その 4 個の玉を円周上に並べる方法は

$\left(4-1\right)!$ 通りあるから、このときの場合の数は

$$1\times\left(4-1\right)!=6\text{通り}$$

である。

[2] 取り出した 4 個の玉のうち 2 個が同じ色であり、残りの 2 個が異なる色であるとき

玉の色の組み合わせの選び方は ${}_4\text{C}_1\times{}_3\text{C}_2$ 通りあり、その 4 個の玉を円周上に並べるとき、

その方法は同じ色の玉が隣り合うときは2通り、同じ色の玉が向かい合うときは1通り

であるから、このときの場合の数は

$${}_4\text{C}_1\times{}_3\text{C}_2\times\left(2+1\right)=36\text{通り}$$

である。

[3] 取り出した 4 個の玉のうち 2 個が同じ色であり、残りの 2 個も同じ色であるとき

玉の色の組み合わせの選び方は ${}_4\text{C}_2$ 通りあり、その 4 個の玉を円周上に並べるとき、そ

の方法は同じ色の玉同士が隣り合うときと同じ色の玉同士が向かい合うときが1通りず

つあるから、このときの場合の数は

$${}_4\text{C}_2\times\left(1+1\right)=12\text{通り}$$

である。

以上、[1], [2], [3]の場合は互いに排反であるから、求める場合の数は全部で

$$6+36+12=54\text{通り}$$

である。

〔3〕(a)

$\triangle\text{ABD}$ の外接円の半径が r であるから、 $\triangle\text{ABD}$ について正弦定理より

$$\begin{aligned}\frac{\text{BD}}{\sin\theta}&=2r\\ \Leftrightarrow\text{BD}&=2r\sin\theta\end{aligned}$$

となる。また、 $\triangle\text{ABD}$ の外接円の中心を O とおくと、 $\text{AB}=\text{AD}, \text{OB}=\text{OD}$ であるから図形の

対称性より線分 OA は $\angle\text{BAD}$ の二等分線となる。よって、 $\angle\text{OAB}=\frac{\theta}{2}$ となるから $\triangle\text{OAB}$ につ

いて余弦定理より

$$\begin{aligned}\cos\angle\text{OAB}&=\frac{\text{AB}^2+\text{OA}^2-\text{OB}^2}{2\cdot\text{AB}\cdot\text{OA}}\\ \Leftrightarrow\cos\frac{\theta}{2}&=\frac{a^2+r^2-r^2}{2\cdot a\cdot r}\\ \Leftrightarrow\cos\frac{\theta}{2}&=\frac{a}{2r}\end{aligned}$$

となり

$$\begin{aligned}\cos\theta&=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1\\ &=2\left(\frac{a}{2r}\right)^2-1\\ &=\frac{a^2}{2r^2}-1\end{aligned}$$

である。

(b)

(a)の結果より

$$\begin{aligned}\text{BD}&=2r\sin\theta\\ &=2r\sqrt{1-\cos^2\theta}\left(\because\sin\theta>0\right)\\ &=2r\sqrt{1-\left(\frac{a^2}{2r^2}-1\right)^2}\end{aligned}$$

となるから、 $a=2, r=\sqrt{5}$ のとき

$$\text{BD}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$$

である。次に、点 A, C から線分 BD に下ろした垂線の足をそれぞれ M, H とおくと、四角形

ABCD の面積は $\frac{1}{2}\text{BD}\cdot\text{AM}+\frac{1}{2}\text{BD}\cdot\text{CH}$ となる。ここで、 BD, AM はともに正の定数であるか

ら、 CH が最大となるときの四角形 ABCD の面積も最大となり、これは図形の対称性より H が

線分 BD の中点に一致するときである。さらに、このとき 2 点 M, H は一致し、 $\text{A}, \text{O}, \text{C}$ は一直

線上に存在する。よって、このとき AC は円の直径に一致し、四角形 ABCD の面積は最大値

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\text{BD}\cdot\text{AM}+\frac{1}{2}\text{BD}\cdot\text{CH}&=\frac{1}{2}\text{BD}\cdot\text{AC}\\ &=\frac{1}{2}\cdot\frac{8\sqrt{5}}{5}\cdot2\sqrt{5}\\ &=8\end{aligned}$$

をとる。

〔4〕

$\alpha=72^\circ$ とするとき、三角関数の和積変換公式より

$$\begin{aligned}\cos3\alpha-\cos2\alpha&=-2\sin\frac{3\alpha+2\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha-2\alpha}{2}\\ &=-2\sin\frac{5}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\alpha\\ &=-2\sin180^\circ\sin36^\circ\\ &=0\end{aligned}$$

となる。一方

$$\begin{aligned}\cos3\alpha-\cos2\alpha&=\left(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha\right)-\left(2\cos^2\alpha-1\right)\\ &=4\cos^3\alpha-2\cos^2\alpha-3\cos\alpha+1\end{aligned}$$

であるから

$$4\cos^3\alpha-2\cos^2\alpha-3\cos\alpha+1=0$$

が成り立つ。よって、 $\cos\alpha$ は x の 3 次方程式

$$4x^3-2x^2-3x+1=0$$

の解の 1 つであり

$$\begin{aligned}4x^3-2x^2-3x+1&=0\\ \Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(4x^2+2x-1\right)&=0\\ \Leftrightarrow x=1,\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}\end{aligned}$$

となることと、 $0<\cos\alpha<1$ であることから

$$\cos\alpha=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

となる。さらに、このとき

$$\begin{aligned}\cos^2\frac{\alpha}{2}&=\frac{1+\cos\alpha}{2}\\ &=\frac{3+\sqrt{5}}{8}\end{aligned}$$

である。

II

【解答】

ア	0	イ	0	ウ	2	エ	-4	オ	-3
---	---	---	---	---	---	---	----	---	----

カ	2	キ	$-\frac{m}{3}$	ク	1	ケ	-2
---	---	---	----------------	---	---	---	----

コ	$3x^2 - 32$	サ	108
---	-------------	---	-----

【解説】

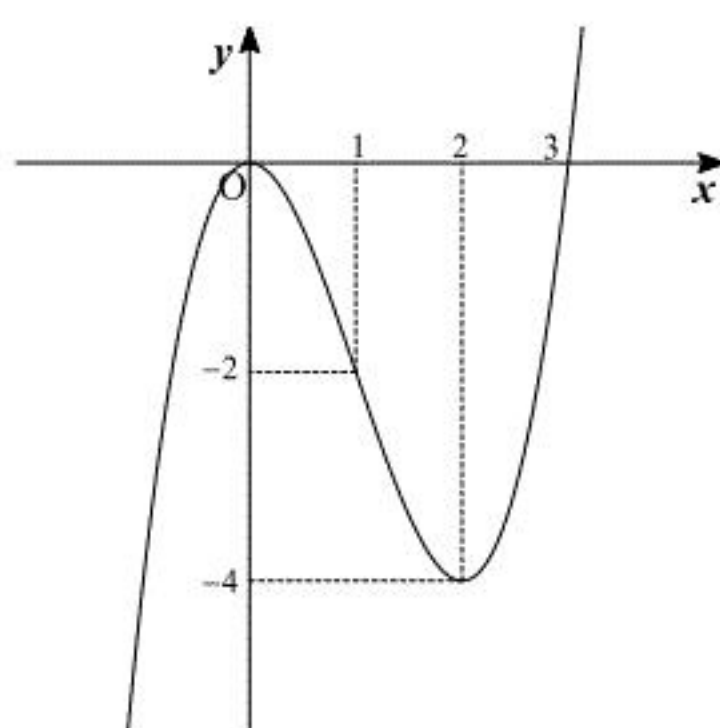
[1]

関数 $f(x) = x^3 - 3x^2$ について

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 6x \\ &= 3x(x-2) \end{aligned}$$

であることより、 $f(x)$ の増減表およびグラフは以下のようになる。

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗



よって、 $f(x)$ は $x=0$ のとき極大値 0 であり、 $x=2$ のとき極小値 -4 である。

[2] (a)

曲線 $C_1: y = f(x)$ は同一の直線と 2 つ以上の接点を持ち得ない。また、曲線 C_1 上の x 座標が t である点における接線の傾きが m であるとき $f'(t) = m$ が成り立つ。よって、傾き m の C_1 の接線の数は、 $f'(t) = m$ を満たす t の個数と一致する。

$$\begin{aligned} f'(t) &= m \\ \Leftrightarrow 3t^2 - 6t - m &= 0 \end{aligned}$$

であり、これを t の 2 次方程式と見て、解の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = 9 + 3m$$

であるから、傾き m の接線の数は

$$D=0 \Leftrightarrow m=-3 \text{ のとき } 1 \text{ 本}$$

$$D>0 \Leftrightarrow m>-3 \text{ のとき } 2 \text{ 本}$$

である。

(b)

傾き m の接線が 2 本あるとき、(a) の結果より $m > -3$ であるもとで、2 つの接点 A、B の x 座標 α, β は 2 次方程式 $3x^2 - 6x - m = 0$ の 2 つの実数解である。よって、解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = -\frac{m}{3}$$

である。したがって、線分 AB の中点の座標を (X, Y) とおくと

$$\begin{aligned} X &= \frac{\alpha + \beta}{2} \\ &= 1 \\ Y &= \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} \\ &= \frac{\alpha^3 - 3\alpha^2 + \beta^3 - 3\beta^2}{2} \\ &= \frac{(\alpha + \beta)^3 - 3(\alpha + \beta)^2 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta) + 6\alpha\beta}{2} \\ &= -2 \end{aligned}$$

となる。

(c)

$C_1: y = f(x)$, $l: y = 6x - 8$ の交点の x 座標は

$$\begin{aligned} f(x) &= 6x - 8 \\ \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 6x + 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(x+2)(x-4) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -2, 1, 4 \end{aligned}$$

であり、これより C_1, l の交点の座標は $(-2, -20), (1, -2), (4, 16)$ となる。ここで、2 点 A、B は C_1, l 上に存在することから、3 点 $(-2, -20), (1, -2), (4, 16)$ のいずれかに対応する。さらに、(b) の結果より、この 3 点のうち $(1, -2)$ は線分 AB の中点にあたるから、2 点 A、B の x 座標 α, β は -2, 4 のいずれかとなり、 $\alpha > \beta$ であることより $\alpha = 4, \beta = -2$ となる。よって、点 A における曲線 C_1 の接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= f'(4)(x-4) + f(4) \\ \Leftrightarrow y &= 24x - 80 \end{aligned}$$

である。ここで、放物線 C_2 の方程式を $y = g(x)$ とおくと、点 A における放物線 C_2 の接線が $y = 24x - 80$ であることから、実数 a ($a \neq 0$) を用いて

$$g(x) = a(x-4)^2 + 24x - 80$$

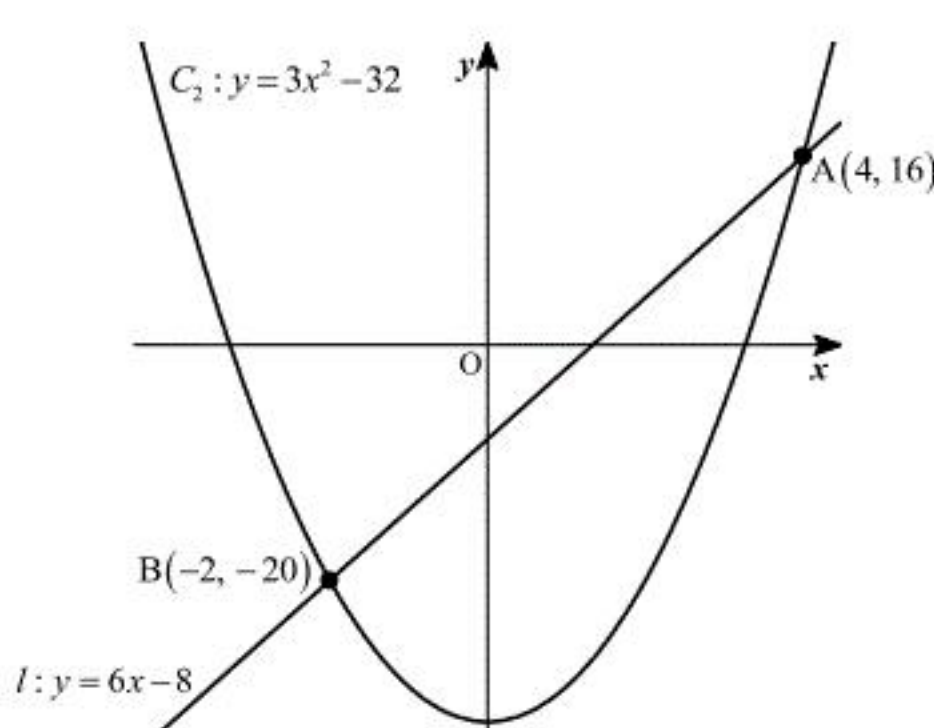
とおくことができ、放物線 C_2 が点 B を通ることから

$$\begin{aligned} -20 &= g(-2) \\ \Leftrightarrow -20 &= a(-2-4)^2 + 24 \cdot (-2) - 80 \\ \Leftrightarrow a &= 3 \end{aligned}$$

となる。以上より、放物線 C_2 の方程式は

$$\begin{aligned} y &= 3(x-4)^2 + 24x - 80 \\ \Leftrightarrow y &= 3x^2 - 32 \end{aligned}$$

である。放物線 C_2 と直線 l の概形は下図のようになる。



よって、放物線 C_2 と直線 l で囲まれる部分の面積は

$$\begin{aligned} \int_{-2}^4 \{(6x-8) - (3x^2-32)\} dx &= -3 \int_{-2}^4 (x+2)(x-4) dx \\ &= 3 \cdot \frac{(4+2)^3}{6} \\ &= 108 \end{aligned}$$

となる。

III

【解答】

ア	$\frac{1}{27}$	イ	$\frac{2}{9}$	ウ	$\frac{4}{9}$	エ	0	オ	2
カ	0	キ	$\frac{4}{9}$	ク	$\frac{1}{9}$	ケ	$\frac{4}{9}$	コ	$\frac{4}{9}$
サ	$\frac{1}{2}$	シ	$-\frac{1}{2}$	ス	$\left(\frac{2}{3}\right)^n$				
セ	0	ソ	$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$	タ	$\frac{2^{n-1}}{3^{n+2}}$				

【解説】

[1]

全ての球の取り出し方は同様に確からしいとする。この操作が3回目に終了し、車体の色が白になるのは、白球が3回連続で出る場合であるから、このようになる確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

である。次に、3回目の操作で白が1つ多く記録されているのは、3回の操作のうち白球が2回、赤球が1回出る場合であるから、そのようになる確率は

$${}_3C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{9}$$

である。また、3回目の操作で赤が1つ多く記録されているのは、3回の操作のうち白球が1回、赤球が2回出る場合であるから、そのようになる確率は

$${}_3C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

である。

[2]

n 回目の操作で白と赤がそれぞれ k, l 個記録されているとき、これを (k, l) と表すこととする。操作が3回目で終了せず、4回目の操作を行ったとき、記録されている白と赤の数の組み合わせは $(3, 1), (2, 2), (1, 3)$ のいずれかとなり、このとき、記録されている白と赤の差は0または2である。以降の偶数回目の操作でも記録されている白と赤の差は0または2となるから、偶数回目の操作で車体の色が決定する、すなわち記録されている白と赤の差が3になる確率は0である。

[3]

$2n+1$ 回目の操作で白が1つ多く記録されるのは

[1] $2n-1$ 回目の操作で白が1つ多く記録され、その後白球と赤球が1回ずつ出る

[2] $2n-1$ 回目の操作で赤が1つ多く記録され、その後白球が2回出る

のいずれかの場合であり、これらは互いに排反であるから、その確率は

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n \times {}_2C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 + b_n \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ &= \frac{4}{9}a_n + \frac{1}{9}b_n \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。また、 $2n+1$ 回目の操作で赤が1つ多く記録されるのは

[1] $2n-1$ 回目の操作で白が1つ多く記録され、その後赤球が2回出る

[2] $2n-1$ 回目の操作で赤が1つ多く記録され、その後白球と赤球が1回ずつ出る

のいずれかの場合であり、これらは互いに排反であるから、その確率は

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= a_n \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 + b_n \times {}_2C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \\ &= \frac{4}{9}a_n + \frac{4}{9}b_n \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。①、②を満たす $\{a_n\}, \{b_n\}$ について、数列 $\{a_n + \alpha b_n\}$ が等比数列になるとき、その公比を r すると

$$a_{n+1} + \alpha b_{n+1} = r(a_n + \alpha b_n) \quad \cdots \textcircled{3}$$

と表すことができる。また、①、②より

$$\begin{aligned} a_{n+1} + \alpha b_{n+1} &= \left(\frac{4}{9}a_n + \frac{1}{9}b_n\right) + \alpha \left(\frac{4}{9}a_n + \frac{4}{9}b_n\right) \\ &= \left(\frac{4}{9}\alpha + \frac{4}{9}\right)a_n + \left(\frac{4}{9}\alpha + \frac{1}{9}\right)b_n \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{4}$$

となるから、③、④を同時に満たす α, r の値は

$$\begin{aligned} &\begin{cases} r = \frac{4}{9}\alpha + \frac{4}{9} \\ r\alpha = \frac{4}{9}\alpha + \frac{1}{9} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha^2 = 1 \\ r = \frac{4}{9}\alpha + \frac{4}{9} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (\alpha, r) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{2}{9}\right) \end{aligned}$$

である。

[1] $\alpha = \frac{1}{2}$ のとき

③より

$$a_{n+1} + \frac{1}{2}b_{n+1} = \frac{2}{3}\left(a_n + \frac{1}{2}b_n\right)$$

となるから、数列 $\left\{a_n + \frac{1}{2}b_n\right\}$ の一般項は

$$\begin{aligned} a_n + \frac{1}{2}b_n &= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \left(a_1 + \frac{1}{2}b_1\right) \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(\because a_1 = \frac{1}{3}, b_1 = \frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

である。

[2] $\alpha = -\frac{1}{2}$ のとき

③より

$$a_{n+1} - \frac{1}{2}b_{n+1} = \frac{2}{9}\left(a_n - \frac{1}{2}b_n\right)$$

となるから、数列 $\left\{a_n - \frac{1}{2}b_n\right\}$ の一般項は

$$\begin{aligned} a_n - \frac{1}{2}b_n &= \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} \left(a_1 - \frac{1}{2}b_1\right) \\ &= 0 \left(\because a_1 = \frac{1}{3}, b_1 = \frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

である。

以上、[1], [2]の結果より

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} \left\{ \left(a_n + \frac{1}{2}b_n\right) + \left(a_n - \frac{1}{2}b_n\right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^n + 0 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n \end{aligned}$$

となる。

[4]

$2n+1$ 回目の操作で車体の色が白に決まるのは、 $2n-1$ 回目の操作で白が1つ多く記録され、その後白球が2回出る場合であるから、そのようになる確率は

$$\begin{aligned} a_n \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ &= \frac{2^{n-1}}{3^{n+2}} \end{aligned}$$

である。

IV

【解答】

ア	$2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}$				イ	$\frac{1}{5}$
---	---	--	--	--	---	---------------

ウ	$\frac{2}{3}$	エ	$\frac{1}{3}$	オ	$\frac{2}{3}$	カ	$\frac{2}{3}(5t-1)$
---	---------------	---	---------------	---	---------------	---	---------------------

キ	$\frac{-2t+4}{9}$	ク	$\frac{8t+2}{9}$	ケ	$\frac{-2t+4}{9}$
---	-------------------	---	------------------	---	-------------------

コ	$\frac{-2t+1}{3}$	サ	$\frac{8t-4}{3}$	シ	$\frac{-2t+4}{3}$	ス	$\frac{9}{13}$
---	-------------------	---	------------------	---	-------------------	---	----------------

【解説】

[1]

$$(2, 2, 2) = 2 \times (1, 0, 0) + 1 \times (0, 2, 0) + 2 \times (0, 0, 1)$$

より、 $\overrightarrow{OD}$ を $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ を用いて表すと

$$\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}$$

である。次に、点E を $\overrightarrow{OE} = t\overrightarrow{OD}$ (t は実数) とすると

$$\overrightarrow{OE} = 2t\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} + 2t\overrightarrow{OC}$$

となるから、点E が 3 点 A, B, C を含む平面 α にある条件は

$$2t + t + 2t = 1$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{5}$$

である。

[2]

平面 α に垂直なベクトルの一つを $\vec{n} = (1, Y, Z)$ とおくと

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 + 2Y = 0 \\ -1 + Z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (Y, Z) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

となるから、これと平行な単位ベクトル $\vec{e}$ の成分は

$$\begin{aligned} \vec{e} &= \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2}} \left(1, \frac{1}{2}, 1\right) \\ &= \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

である。

[3]

[2] の結果より

$$\vec{e} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$$

となる。直線 EG は平面 α に垂直であるから、 $\vec{e}$ と平行であり、実数 k を用いて

$$\overrightarrow{EG} = 4k\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB} + 4k\overrightarrow{OC}$$

と表すことができる。このとき

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG} &= \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EG} \\ &= (2t\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} + 2t\overrightarrow{OC}) + (4k\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB} + 4k\overrightarrow{OC}) \\ &= (2t + 4k)\overrightarrow{OA} + (t + k)\overrightarrow{OB} + (2t + 4k)\overrightarrow{OC} \end{aligned}$$

となり、点G は平面 α に存在することから

$$\begin{aligned} (2t + 4k) + (t + k) + (2t + 4k) &= 1 \\ \Leftrightarrow 5t + 9k &= 1 \\ \Leftrightarrow k &= \frac{1 - 5t}{9} \end{aligned}$$

となる。 $\frac{1}{5} \leq t \leq 1$ であるとき $-\frac{4}{9} \leq k \leq 0$ となり、 $|\overrightarrow{EG}| = 6k|\vec{e}| = 1$ であるから、EG の長さは

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{EG}| &= |6k||\vec{e}| \\ &= -6k \\ &= \frac{2}{3}(5t - 1) \end{aligned}$$

であり、さらに

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG} &= \frac{-2t+4}{9}\overrightarrow{OA} + \frac{4t+1}{9}\overrightarrow{OB} + \frac{-2t+4}{9}\overrightarrow{OC} \\ &= \left(\frac{-2t+4}{9}, \frac{4t+1}{9}, \frac{-2t+4}{9}\right) \end{aligned}$$

となる。次に、点G が $\triangle ABF$ の重心であるとき

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OF}}{3}$$

となるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OF} &= 3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} \\ &= \left(\frac{-2t+4}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{4t+1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{-2t+4}{3}\overrightarrow{OC}\right) - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} \\ &= \frac{-2t+1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{4t-2}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{-2t+4}{3}\overrightarrow{OC} \\ &= \left(\frac{-2t+1}{3}, \frac{4t-2}{3}, \frac{-2t+4}{3}\right) \end{aligned}$$

となる。ここで、点E' を $\overrightarrow{OE'} = \frac{1}{5}\overrightarrow{OD}$ を満たす点とし、また、点D から平面 α に下ろした垂線の

足をG' とすると、 $\frac{1}{5} \leq t \leq 1$ であるとき点E は線分E'D 上を動き、この点E から平面 α に下ろした垂線の足G は線分E'G' 上を動く。さらに、点F の軌跡は点G の軌跡に平行であるから、平面 α 上のある線分上を動く。 $t = \frac{1}{5}$ のときの点F をF₁、 $t = 1$ のときの点F をF₂ とおくと

$$\overrightarrow{OF_1} = \frac{1}{5}\overrightarrow{OA} - \frac{2}{5}\overrightarrow{OB} + \frac{6}{5}\overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OF_2} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$$

となり、さらに

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AF_1} &= \overrightarrow{OF_1} - \overrightarrow{OA} \\ &= -\frac{4}{5}\overrightarrow{OA} - \frac{2}{5}\overrightarrow{OB} + \frac{6}{5}\overrightarrow{OC} \\ &= -\frac{2}{5}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + \frac{6}{5}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) \\ &= -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{6}{5}\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AF_2} &= \overrightarrow{OF_2} - \overrightarrow{OA} \\ &= -\frac{4}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC} \\ &= \frac{2}{3}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + \frac{2}{3}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

となる。 $\overrightarrow{AC}$ の係数がともに正であることから、F₁, F₂ は平面 α 上を直線AB で分けた同じ側に存在する。また、ここで

$$\overrightarrow{AF_2} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AF_1}$$

とおくと

$$\overrightarrow{AF_2} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{aligned} m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AF_1} &= m\overrightarrow{AB} + n\left(-\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{6}{5}\overrightarrow{AC}\right) \\ &= \left(m - \frac{2}{5}n\right)\overrightarrow{AB} + \frac{6}{5}n\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

であり、 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ は互いに一次独立なベクトルであるから

$$\begin{aligned} \begin{cases} m - \frac{2}{5}n = \frac{2}{3} \\ \frac{6}{5}n = \frac{2}{3} \end{cases} \\ \Leftrightarrow (m, n) = \left(\frac{8}{9}, \frac{5}{9}\right) \end{aligned}$$

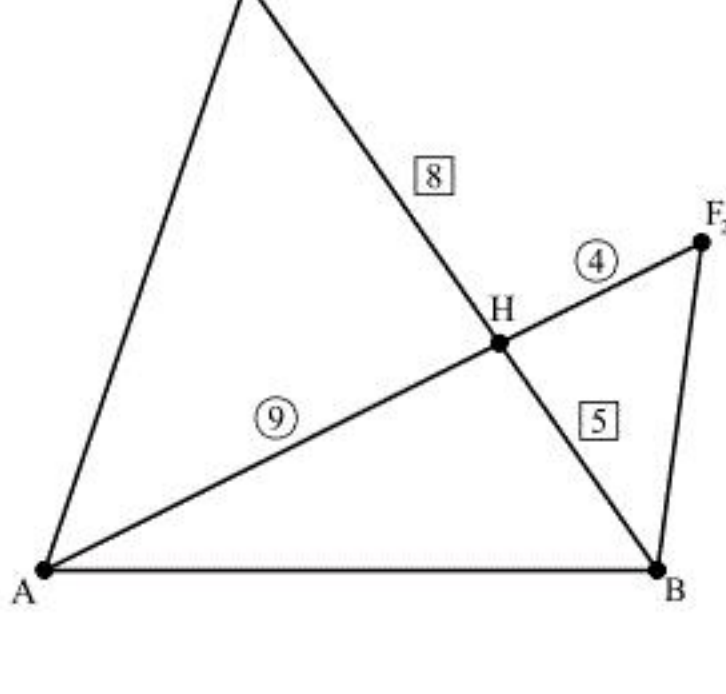
となる。これより

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AF_2} &= \frac{8}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{9}\overrightarrow{AF_1} \\ &= \frac{13}{9}\left(\frac{8}{13}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{13}\overrightarrow{AF_1}\right) \end{aligned}$$

となるから、線分BF₁ を5:8 に内分する点をH とおくと

$$\overrightarrow{AF_2} = \frac{13}{9}\overrightarrow{AH}$$

となり、点H は線分AF₂ を9:4 に内分する。以上の結果より、平面 α 上における点A, B, F₁, F₂, H の位置関係は下図のようになる。



すべての $\triangle ABF$ によりおおわれる図形をすべての $\triangle ABF$ の共通部分と見ると、 $\triangle ABH$ にあたる。ここで、 $\overrightarrow{AB} = (-1, 2, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 1)$ より

$$\overrightarrow{AF_1} = \left(-\frac{4}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{6}{5}\right)$$

となり

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = 5, |\overrightarrow{AF_1}|^2 = \frac{68}{25}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF_1} = -\frac{4}{5}$$

であるから、 $\triangle ABF_1$ の面積を S とおくと

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AF_1}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF_1})^2} \\ &= \frac{9}{5} \end{aligned}$$

となり、求める $\triangle ABH$ の面積は

$$\frac{5}{13}S = \frac{9}{13}$$

である。