

I

【解答】

ア	$(2^n-1)x+2-2^n$	イ	$-x-1$	ウ	18
エ	4	オ	$\frac{1}{4}$	カ	3
キ	690	ク	3240	ケ	192
コ	90				

【解説】

[1] (a)

x^n を x^2-3x+2 で割った余りを、実数 a, b を用いて $ax+b$ とおくと、整式 $P(x)$ を用いて

$$\begin{aligned}x^n &= (x^2-3x+2)P(x)+ax+b \\ &= (x-1)(x-2)P(x)+ax+b\end{aligned}$$

と表すことができる。上式は恒等式であるから $x=1, 2$ を代入すると

$$\begin{aligned}\begin{cases}1=a+b \\ 2^n=2a+b\end{cases} \\ \Leftrightarrow (a, b)=(2^n-1, 2-2^n)\end{aligned}$$

となる。よって求める余りは

$$(2^n-1)x+2-2^n$$

となる。

(b)

$x^3=(x-1)(x^2+x+1)+1$ であるから、整式 $Q(x)$ を用いて

$$\begin{aligned}x^{2015} &= x^2 \cdot (x^3)^{671} \\ &= x^2 \{(x-1)(x^2+x+1)+1\}^{671} \\ &= x^2 \{(x^2+x+1)Q(x)+1\} \\ &= x^2 (x^2+x+1)Q(x)+x^2 \\ &= x^2 (x^2+x+1)Q(x)+(x^2+x+1)-x-1\end{aligned}$$

と表すことができる。よって x^{2015} を x^2+x+1 で割ったときの余りは $-x-1$ となる。

[2] (a)

$$\left(a+\frac{2}{b}\right)\left(b+\frac{8}{a}\right)=ab+\frac{16}{ab}+10$$

となり、 $a>0, b>0$ より $ab, \frac{16}{ab}>0$ であるから、相加相乗平均の関係より

$$\begin{aligned}ab+\frac{16}{ab}+10 &\geq 2\sqrt{ab \cdot \frac{16}{ab}}+10 \\ &=18 \\ \Leftrightarrow \left(a+\frac{2}{b}\right)\left(b+\frac{8}{a}\right) &\geq 18\end{aligned}$$

となる。等号は、

$$\begin{aligned}ab &= \frac{16}{ab} \\ \Leftrightarrow ab &= 4 \quad (\because ab>0)\end{aligned}$$

のとき成り立つ。よって $ab=4$ のとき、 $\left(a+\frac{2}{b}\right)\left(b+\frac{8}{a}\right)$ は最小値 18 をとる。

(b)

$a>1$ のとき $a-1, \frac{4}{a-1}>0$ であるから、相加相乗平均の関係より

$$\begin{aligned}\frac{a-1}{a^2-2a+5} &= \frac{a-1}{(a-1)^2+4} \\ &= \frac{1}{(a-1)+\frac{4}{a-1}} \\ &\leq \frac{1}{2\sqrt{(a-1) \cdot \frac{4}{a-1}}} \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

となる。等号は

$$\begin{aligned}a-1 &= \frac{4}{a-1} \\ \Leftrightarrow (a-1)^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow a-1 &= 2 \quad (\because a>1) \\ \Leftrightarrow a &= 3\end{aligned}$$

のとき成り立つ。よって $\frac{a-1}{a^2-2a+5}$ は $a=3$ のとき最大値 $\frac{1}{4}$ をとる。

[3] (a)

[1] 選んだ 5 文字がすべて異なる文字であるとき

文字の選び方は 1 通り、並べ方は

$$5!=120$$

通りであるから、この場合の数は 120 通りである。

[2] a または i が 2 つあり、それ以外の 3 文字がすべて異なる場合

文字の選び方は、2 つ使用する文字を 1 つ選び、1 文字ずつ使用する文字を 3 つ選ぶので、

$$2 \times {}_4C_3=8$$

通りであり、並べ方は

$$\frac{5!}{2}=60$$

通りであるから、この場合の数は

$$8 \times 60=480$$

通りとなる。

[3] a, i とともに 2 つあるとき

残りの 1 つの文字の選び方は

$${}_3C_1=3$$

通りであり、並べ方は

$$\frac{5!}{2!2!}=30$$

通りとなるから、この場合の数は

$$3 \times 30=90$$

通りとなる。

以上、[1], [2], [3] より、求める場合の数は、

$$120+480+90=690$$

通りとなる。

(b)

kinugasa の中からすべて異なる 5 文字を選んで横 1 列に並べる場合の数は

$${}_7C_5 \times 5!=2520$$

通りである。この場合は隣接するどの 2 文字も異なる文字である。次に選んだ 5 文字の中に a

が 2 つ含まれる場合の文字列の数は

$$\frac{{}_6C_3 \times 5!}{2!}=1200$$

通りとなる。このうち 2 つの a が隣り合って並んでいる文字列の数は

$${}_6C_3 \times 4!=480$$

通りであるから、次に選んだ 5 文字の中に a が 2 つ含まれ、かつその a が隣り合っていない場

合の文字列の数は

$$1200-480=720$$

通りとなる。よって求める場合の数は

$$720+2520=3240$$

通りとなる。

(c)

a と b の間にほかの 1 文字 x が入っている場合の数について考える。a, b, x からなる 3 文字の

並べ方は、axb もしくは bxa の 2 通りであり、x の選び方は 4 通りである。またこの 3 文字を

ひとまとめにして考えれば、その他の 3 文字と合わせて作る文字列の数は

$$4!=24$$

通りとなる。よって求める場合の数は

$$2 \times 4 \times 24=192$$

通りとなる。

(d)

3 つのグループに入る文字の数は $(1, 1, 4), (1, 2, 3), (2, 2, 2)$ のいずれかである。グループを区

別しないとすると、求める場合の数は

$$\frac{{}_6C_1 \times {}_5C_1}{2!} + {}_6C_1 \times {}_5C_2 + \frac{{}_6C_2 \times {}_4C_2}{3!} = 15+60+15$$

$$=90$$

通りとなる。

II

【解答】

サ	－	シ	$2-a$	ス	a
セ	1	ソ	$\frac{a}{2}+\frac{3}{4}$	タ	a

【解説】

[1]

この国は A と B の 2 つの州で構成されていることから、

$$P+Q=N$$

が成り立つので、

$$\begin{aligned} q &= \frac{Q}{N} \\ &= \frac{N-P}{N} \\ &= 1-p \end{aligned}$$

と表すことができる。これより、 $0 < p \leq 1$ のとき $0 \leq q < 1$ であり、このとき、

$$\begin{aligned} y_B &= -q^2 + aq + 1 \\ &= -(1-p)^2 + a(1-p) + 1 \\ &= -p^2 + (2-a)p + a \end{aligned}$$

と書き換えることができる。また、 $q=0$ 、すなわち $p=1$ のときは、

$$y_B = 0$$

である。

[2]

初期条件の p を $p_0 \left(p_0 \neq \frac{1}{2} \right)$ とする。[1] の結果より、

$$\begin{aligned} z(p) &= y_A - y_B \\ &= (-p^2 + ap + 1) - (-p^2 + (2-a)p + a) \\ &= 2(a-1)p - a + 1 \\ &= (a-1)(2p-1) \end{aligned}$$

と表すことができるので、

$$\begin{aligned} z(p) &= 0 \\ \Leftrightarrow (a-1)(2p-1) &= 0 \\ \therefore a=1, p &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

が成り立つ。以下、 a の値により場合分けを行う。

[1] $a=1$ のとき

このとき、 $z(p)=0$ であり、

$$\begin{aligned} y_A &= \begin{cases} -\left(p-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} & (0 < p \leq 1) \\ 0 & (p=0) \end{cases} \\ y_B &= \begin{cases} -\left(p-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} & (0 \leq p < 1) \\ 0 & (p=1) \end{cases} \end{aligned}$$

より、 y_A, y_B はともに $0 \leq p < \frac{1}{2}$ で単調増加し、 $\frac{1}{2} < p \leq 1$ で単調減少する。従って、

$z(p)=0$ のときは、 $p=\frac{1}{2}$ で y_A, y_B ともに最大値をとり人口移動が止まるので、

$$p^* = \frac{1}{2}$$

である。また、このときの所得は、

$$y_A = y_B = \frac{5}{4}$$

である。

[2] $0 < a < 1$ のとき

このとき、

$$z(p) = (a-1)(2p-1)$$

であるから、 $0 \leq p < \frac{1}{2}$ のとき、 $z(p) > 0$ となるので p は増加する。また、 $\frac{1}{2} < p \leq 1$ のと

き、 $z(p) < 0$ となるので p は減少する。従って、 p の値は $\frac{1}{2}$ に常に近づいていく。また、

$p=\frac{1}{2}$ になったとき、

$$\begin{aligned} y_A &= -\left(p-\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4} + 1 \\ y_A &= -\left\{p-\left(1-\frac{a}{2}\right)\right\}^2 + \frac{a^2}{4} + 1 \end{aligned}$$

より、どのように人口が移動してもいずれかの国の所得が減るので、ここで移動が止ま

り、

$$p^* = \frac{1}{2}$$

となる。また、このときの所得は、

$$\begin{aligned} y_A &= -p^2 + ap + 1 \\ &= \frac{a}{2} + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_B &= -p^2 + ap + 1 \\ &= \frac{a}{2} + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

と表される。これは、[1] の $a=1$ の場合も含む。

[3] $1 < a$ のとき

このとき、

$$z(p) = (a-1)(2p-1)$$

である。 $p_0 \neq \frac{1}{2}$ であり、 $0 \leq p < \frac{1}{2}$ のとき、 $z(p) < 0$ となるので p は減少する。また、

$\frac{1}{2} < p \leq 1$ のとき、 $z(p) > 0$ となるので p は増加する。従って、 p の値は 0 もしくは 1 に常

に近づいていき、0 もしくは 1 になったとき止まるので、

$$p^* = 0, 1$$

である。また、このときの所得は、

$$\begin{aligned} y_A &= -1^2 + a \cdot 1 + 1 \\ &= a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_B &= -1^2 + a \cdot 1 + 1 \\ &= a \end{aligned}$$

と表される。

以上[1], [2], [3]より、

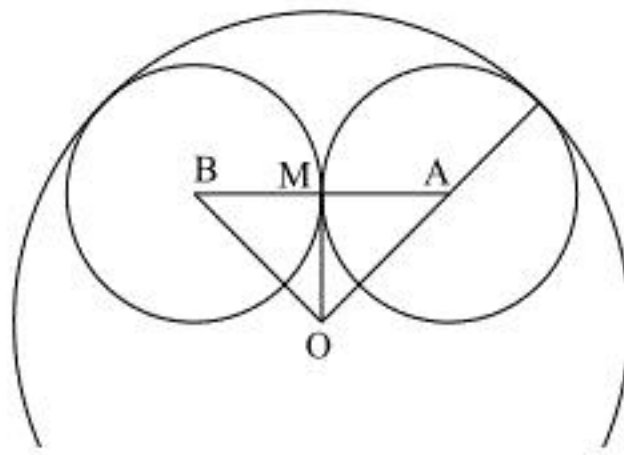
$$0 < a \leq 1 \text{ のとき } p^* = \frac{1}{2} \text{ であり、一人当たりの所得は } \frac{a}{2} + \frac{3}{4}$$

$$1 < a \text{ のとき } p^* = 0 \text{ もしくは } 1 \text{ であり、一人当たりの所得は } a$$

である。

Ⅲ

[1]



円 P_1 群の隣り合う 2 つの円の中心をそれぞれ A, B とし, 2 つの円の接点を M とする。また, 円 C_1 の中心を O とすると, $OA = 1 - r_1$, $AM = r_1$, $\angle AMO = 90^\circ$ であるから,

$$\begin{aligned}\angle AOM &= \frac{2\pi}{k} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\pi}{k}\end{aligned}$$

より

$$AM = AO \sin \angle AOM$$

$$\Leftrightarrow r_1 = (1 - r_1) \sin \frac{\pi}{k}$$

$$\Leftrightarrow r_1 = \frac{\sin \frac{\pi}{k}}{1 + \sin \frac{\pi}{k}} \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。したがって, $k = 4$ のとき

$$\begin{aligned}r_1 &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \\ &= \sqrt{2} - 1\end{aligned}$$

となる。

(答) $r_1 = \sqrt{2} - 1$

[2]

$$\begin{aligned}A_k &= 1 - \cos \frac{2\pi}{k} \\ &= 1 - \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{k}\right) \\ &= 2 \sin^2 \frac{\pi}{k} \\ \therefore \sin \frac{\pi}{k} &= \sqrt{\frac{A_k}{2}} \quad \left(\because \sin \frac{\pi}{k} > 0\right)\end{aligned}$$

であるから, ①に代入して

$$\begin{aligned}r_1 &= \frac{\sqrt{\frac{A_k}{2}}}{1 + \sqrt{\frac{A_k}{2}}} \\ &= \frac{\sqrt{A_k}}{\sqrt{A_k} + \sqrt{2}}\end{aligned}$$

となる。

(答) $r_1 = \frac{\sqrt{A_k}}{\sqrt{A_k} + \sqrt{2}}$

[3]

円 C_2 の半径は $1 - 2r_1$ で表されるので, 円 P_1 群の円の半径と円 C_2 の半径が等しいとき

$$\begin{aligned}r_1 &= 1 - 2r_1 \\ \Leftrightarrow r_1 &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

となる。よって, ①より

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} &= \frac{\sin \frac{\pi}{k}}{1 + \sin \frac{\pi}{k}} \\ \Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{k} &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{\pi}{k} &= \frac{\pi}{6} \\ \Leftrightarrow k &= 6\end{aligned}$$

である。

(答) $k = 6$

[4]

円 P_n 群の円の半径を r_n とおくと, $k = 6$ のとき

$$\begin{aligned}1 : (1 - 2r_1) &= r_n : r_{n+1} \\ \Leftrightarrow 1 : \frac{1}{3} &= r_n : r_{n+1} \\ \Leftrightarrow r_{n+1} &= \frac{1}{3} r_n\end{aligned}$$

である。このとき, 数列 $\{r_n\}$ は初項 $\frac{1}{3}$, 公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列であるから

$$\begin{aligned}r_n &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{3^n}\end{aligned}$$

となる。したがって,

$$\begin{aligned}S_n &= \pi r_n^2 \cdot k \\ &= \frac{\pi}{3^{2n}} \cdot 6 \\ &= \frac{2}{3^{2n-1}} \pi\end{aligned}$$

である。

(答) $S_n = \frac{2}{3^{2n-1}} \pi$

[5]

円 P_i 群の半径を r_i とすると, 円 P_i 群の k 個の円の面積の和 S_i は

$$S_i = k \cdot \pi r_i^2$$

である。また, $\frac{r_{i+1}}{r_i} = \frac{1 - 2r_1}{1}$ (相似比) より, 数列 $\{S_n\}$ は初項 S_1 , 公比 $(1 - 2r_1)^2$ の等比数列となる。

したがって,

$$\begin{aligned}S &= \sum_{i=1}^n S_i \\ &= \frac{k\pi r_1^2 \{1 - (1 - 2r_1)^{2n}\}}{1 - (1 - 2r_1)^2} \\ &= \frac{k\pi r_1^2 \{1 - (1 - 2r_1)^{2n}\}}{2r_1(2 - 2r_1)} \\ &= \frac{k\pi r_1 \{1 - (1 - 2r_1)^{2n}\}}{4(1 - r_1)}\end{aligned}$$

となる。ここで, [2] より $r_1 = \frac{\sqrt{A_k}}{\sqrt{A_k} + \sqrt{2}} = \frac{\sin \frac{\pi}{k}}{\sin \frac{\pi}{k} + 1}$ だから,

$$S = \frac{k\pi}{4} \sin \frac{\pi}{k} \left\{ 1 - \left(\frac{1 - \sin \frac{\pi}{k}}{1 + \sin \frac{\pi}{k}} \right)^{2n} \right\}$$

である。

(答) $S = \frac{k\pi}{4} \sin \frac{\pi}{k} \left\{ 1 - \left(\frac{1 - \sin \frac{\pi}{k}}{1 + \sin \frac{\pi}{k}} \right)^{2n} \right\}$