

【解答】

〔1〕	ア			
	$\frac{1}{\sqrt{2}}$			
〔2〕	イ	ウ	エ	オ
	0	-2	$\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$	$4e^{-\frac{3}{2}}$
〔3〕	カ	キ	ク	
	1	$\sqrt{-\log a}$	$-a\log a+a$	
〔4〕	ケ	コ	サ	シ
	$-2e^{-\frac{3}{2}}$	4	1	2

【解説】

〔1〕

$a=0$ のとき $f(x)=e^{-x^2}$ であるから

$$\begin{aligned}f'(x) &= -2xe^{-x^2} \\ f''(x) &= -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} \\ &= 4\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2} \\ &= 4\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{-x^2}\end{aligned}$$

となる。よって、 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ で $f''(x)=0$ となり、 $x=\pm\sqrt{2}$ の前後で $f''(x)$ の符号は変化するから、 $f(x)$ は $x=\pm\sqrt{2}$ で変曲点を持つ。

〔2〕

(1)より $a=0$ のとき

$$\begin{aligned}f'''(x) &= 8xe^{-x^2} - 4x(2x^2 - 1)e^{-x^2} \\ &= -8x\left(x + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(x - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)e^{-x^2}\end{aligned}$$

となるから、 $f''(x)$ の増減は下のようになる。

x	$(-\infty)$	...	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	...	0	...	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	...	$(+\infty)$
$f'''(x)$		+	0	-	0	+	0	-	
$f''(x)$	(0)	↗	$4e^{-\frac{3}{2}}$	↘	-2	↗	$4e^{-\frac{3}{2}}$	↘	(0)

$$\left(\because \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 4\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} 4\left(t - \frac{1}{2}\right)e^{-t} = 0 \left(\because x^2 = t\right)\right)$$

よって $f''(x)$ は $x=0$ で最小値 -2 、 $x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ で最大値 $4e^{-\frac{3}{2}}$ をとる。

〔3〕

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2ax - 2xe^{-x^2} \\ &= 2x(a - e^{-x^2})\end{aligned}$$

となる。ここで、 $f(x)$ はすべての実数で定義され、かつすべての実数で微分可能であるから、 $f(x)$ が異なる 2 点で最小となるとき、その 2 点で極小となる。よって、方程式 $f'(x)=0$ は少なくとも、異なる 2 つの実数解を持たなければならない。ここで、 e^{-x^2} のとりうる値の範囲は $0 < e^{-x^2} \leq 1$ (等号成立は $x=0$ のとき)

であるから、方程式 $f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解を持つためには、 a が $0 < a < 1$ を満たすことが必要であることがわかる($\because a=1$ のときは、 $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ のみ)。逆にこのとき、

$$\begin{aligned}f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0, \pm\sqrt{-\log a}\end{aligned}$$

となり、 $f'(x)$ の符号変化に注意すると $f(x)$ の増減は以下のようになる。

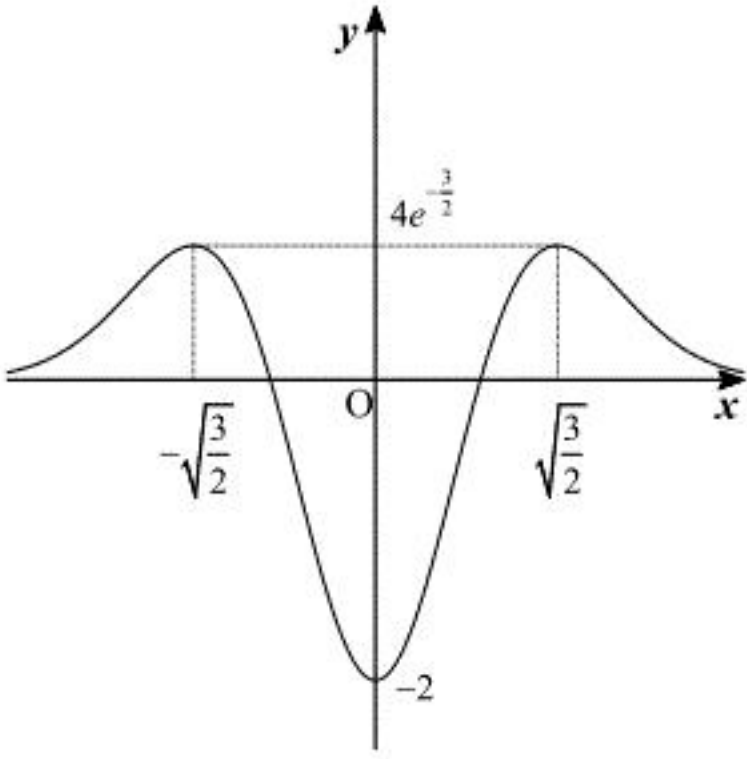
x	...	$-\sqrt{-\log a}$	...	0	...	$\sqrt{-\log a}$	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	$-a\log a+a$	↗	1	↘	$-a\log a+a$	↗

よって $0 < a < 1$ のとき、 $f(x)$ は $x=\pm\sqrt{-\log a}$ で最小値 $-a\log a+a$ をとる。

〔4〕

$$f''(x) = 2a - 2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$$

となる。ここで $g(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$ とすれば $g(x)$ は $a=0$ のときの $f''(x)$ に一致し、 $f(x)$ が変曲点をもつには方程式 $g(x) = -2a$ が解を持つことが必要である。ここで、〔2〕より $y=g(x)$ のグラフは以下の図のようになる。



よって

$$\begin{aligned}0 &< -2a < 4e^{-\frac{3}{2}} \\ \Leftrightarrow -2e^{-\frac{3}{2}} &< a < 0\end{aligned}$$

のとき方程式 $g(x) = -2a$ 、つまり方程式 $f''(x) = 0$ は 4 個の解を持ち、また、これらの x の値の前後で $f''(x)$ の符号は変化するから、 $f(x)$ は変曲点を 4 個持つことがわかる。さらに、

$$\begin{aligned}-2 &< -2a \leq 0 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq a < 1\end{aligned}$$

のとき $f''(x) = 0$ は 2 個の解を持ち、また、これらの x の値の前後で $f''(x)$ の符号は変化するから、 $f(x)$ は変曲点を 2 個持つことがわかる。

【解答】

(1)	㊦	㊧	㊨	㊩	㊪
	$\sqrt{\frac{5}{4}t^2-2st+2s^2-2s+1}$	$\frac{4}{5}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
(2)	㊫	㊬	㊭		
	$\left(\frac{2}{5}\right)^{m-1}\left(s_1-\frac{5}{6}\right)+\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{3}$		
(3)	㊮	㊯			
	$-\frac{1}{6}$	0			

【解答】

〔1〕

題意より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OB}} + s\overrightarrow{\mathrm{BC}} \\ &= (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OB}} + s\overrightarrow{\mathrm{OC}} \\ &= (1-s)(0, 0, 1) + s(1, 0, 0) \\ &= (s, 0, 1-s) \\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= t\overrightarrow{\mathrm{OA}} \\ &= \left(t, \frac{t}{2}, 0\right) \\ \overrightarrow{\mathrm{PQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} \\ &= \left(t, \frac{t}{2}, 0\right) - (s, 0, 1-s) \\ &= \left(t-s, \frac{t}{2}, s-1\right)\end{aligned}$$

であるから、2点 P, Q 間の距離 $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$ は、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| &= \sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2} \\ &= \sqrt{(t-s)^2 + \left(\frac{t}{2}\right)^2 + (s-1)^2} \\ &= \sqrt{\frac{5}{4}t^2 - 2st + 2s^2 - 2s + 1}\end{aligned}$$

と表すことができる。従って、点 Q が点 P₁ に最も近づくときの t は、 $|\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{Q}}|$ に最小値を与える t

であるから、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{Q}}| &= \sqrt{\frac{5}{4}t^2 - 2s_1t + 2s_1^2 - 2s_1 + 1} \\ &= \sqrt{\frac{5}{4}\left(t - \frac{4}{5}s_1\right)^2 + \frac{6}{5}s_1^2 - 2s_1 + 1}\end{aligned}$$

より、

$$t = \frac{4}{5}s_1$$

である。また、点 P が点 Q₁ に最も近づくときの s は、 $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}_1}|$ に最小値を与える s であるから、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{PQ}_1}| &= \sqrt{\frac{5}{4}t_1^2 + 2s^2 - 2st_1 - 2s + 1} \\ &= \sqrt{2\left\{s - \left(\frac{t_1+1}{2}\right)\right\}^2 + \frac{3}{4}t_1^2 - t_1 + \frac{1}{2}}\end{aligned}$$

より、

$$s = \frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}$$

である。

〔2〕

〔1〕の結果より、 $m \geq 2$ のとき

$$\begin{cases} s_m = \frac{1}{2}t_{m-1} + \frac{1}{2} \\ t_m = \frac{4}{5}s_m \end{cases}$$

である。ここで〔1〕における t_1 の定め方より、 $m=1$ のときも $t_1 = \frac{4}{5}s_1$ が成立することに注意

しておく。これより、 $m \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned}s_m &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5}s_{m-1} + \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow s_m - \frac{5}{6} &= \frac{2}{5}\left(s_{m-1} - \frac{5}{6}\right)\end{aligned}$$

であるから、この漸化式より

$$\begin{aligned}s_m - \frac{5}{6} &= \left(\frac{2}{5}\right)^{m-1}\left(s_1 - \frac{5}{6}\right) \\ \therefore s_m &= \left(\frac{2}{5}\right)^{m-1}\left(s_1 - \frac{5}{6}\right) + \frac{5}{6}\end{aligned}$$

を得るため、 $0 < \frac{2}{5} < 1$ より

$$\begin{aligned}\lim_{m \rightarrow \infty} s_m &= \frac{5}{6} \\ \lim_{m \rightarrow \infty} t_m &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{4}{5}s_m \\ &= \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

となる。

〔3〕

〔1〕、〔2〕の結果より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{P}_\infty\mathrm{Q}_\infty} &= \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{6}, \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}, \frac{5}{6} - 1\right) \\ &= \left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{6}\right)\end{aligned}$$

と表すことができるから、任意の s, t について、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{P}_\infty\mathrm{Q}_\infty} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{6}\right) \cdot (s, 0, 1-s) \\ &= -\frac{1}{6} \\ \overrightarrow{\mathrm{P}_\infty\mathrm{Q}_\infty} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= \left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{6}\right) \cdot \left(t, \frac{t}{2}, 0\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

が成り立つ。

III

【解答】

$\boxtimes$	$\boxplus$	$\diagup$	$\diagdown$	$\boxdot$
-1	1	x	$\frac{st-1}{t-s}$	1
$\boxminus$	$\boxless$	$\boxdot$	$\boxtimes$	
$\frac{st-1}{t-s}$	$\frac{1-R^{n+1}}{1+R^{n+1}}$	1	-1	

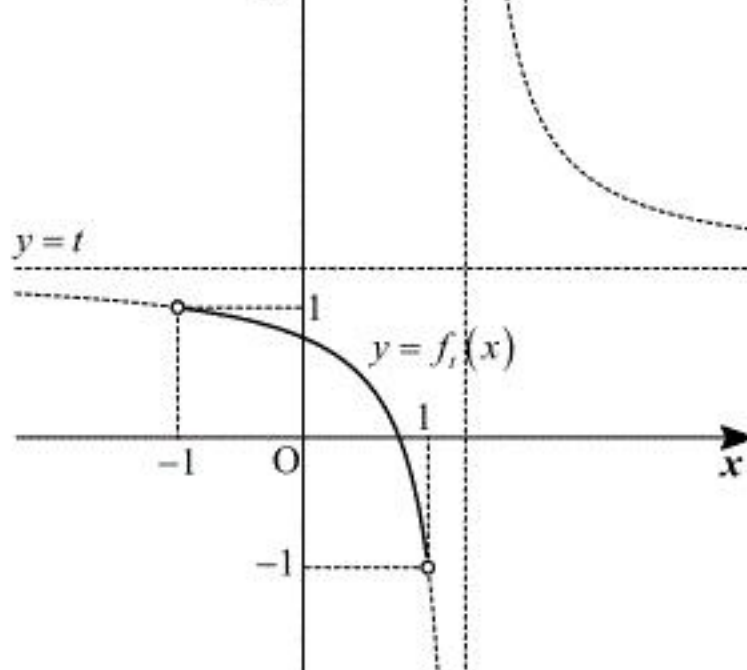
【解説】

関数 $f_t(x)$ を変形すると

$$\begin{aligned} f_t(x) &= \frac{tx-1}{x-t} \\ &= \frac{t(x-t)+t^2-1}{x-t} \\ &= \frac{t^2-1}{x-t} + t \end{aligned}$$

となり、 $t > 1$ より $t^2 - 1 > 0$ であることから、 xy 平面上で関数 $y = f_t(x)$ のグラフを図示すると、

以下の図のようになる。



よって、 $f_t(x)$ の値域は $-1 < f_t(x) < 1$ であることがわかる。したがって、合成関数 $f_t(f_t(x))$ を定義することができ、これを計算すると

$$\begin{aligned} f_t(f_t(x)) &= \frac{t\left(\frac{tx-1}{x-t}\right)-1}{\left(\frac{tx-1}{x-t}\right)-t} \\ &= \frac{t(tx-1)-(x-t)}{(tx-1)-t(x-t)} \\ &= \frac{(t^2-1)x}{t^2-1} \\ &= x \end{aligned}$$

となる。また、実数 s で $s \neq t, s > 1$ を満たすものに対し、合成関数 $g(x) = f_s(f_t(x))$ を定義することができ、これを計算すると

$$\begin{aligned} g(x) &= f_s(f_t(x)) \\ &= \frac{s\left(\frac{tx-1}{x-t}\right)-1}{\left(\frac{tx-1}{x-t}\right)-s} \\ &= \frac{s(tx-1)-(x-t)}{(tx-1)-s(x-t)} \\ &= \frac{(st-1)x-s+t}{(t-s)x+st-1} \\ &= \frac{\frac{st-1}{t-s}x+1}{x+\frac{st-1}{t-s}} \quad (\because s \neq t) \end{aligned}$$

となる。ここで $Q = \frac{st-1}{t-s}$ とおくと、 $s, t > 1$ より $Q \neq 0$ であり

$$\begin{aligned} (s+1)(t-1) &\neq 0 \\ \Leftrightarrow st-1 &\neq -(t-s) \\ \Leftrightarrow Q &\neq -1 \end{aligned}$$

であるから、 $R = \frac{Q-1}{Q+1} (\neq -1)$ が定義できる。このとき、 $g\left(\frac{1-R^n}{1+R^n}\right)$ を R を用いて表すと

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1-R^n}{1+R^n}\right) &= \frac{Q \cdot \frac{1-R^n}{1+R^n} + 1}{\frac{1-R^n}{1+R^n} + Q} \\ &= \frac{(1-R^n)Q + (1+R^n)}{(1-R^n) + (1+R^n)Q} \\ &= \frac{(Q+1) - R^n(Q-1)}{(Q+1) + R^n(Q-1)} \\ &= \frac{1-R^n \cdot \frac{Q-1}{Q+1}}{1+R^n \cdot \frac{Q-1}{Q+1}} \\ &= \frac{1-R^{n+1}}{1+R^{n+1}} \quad \dots \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。数列 $\{a_n\}$ を

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1-R}{1+R} \\ a_{n+1} = g(a_n) \quad (n \geq 1) \end{cases}$$

と定めると、この数列の一般項は

$$a_n = \frac{1-R^n}{1+R^n} \quad \dots \dots \textcircled{2}$$

となることを数学的帰納法で示す。

[1] $n=1$ のとき②が成立することを示す

$$\textcircled{2} \text{ は } a_1 = \frac{1-R^1}{1+R^1} = \frac{1-R}{1+R} \text{ となるから、与えられた漸化式より成立することがわかる。}$$

[2] $n=k$ で②が成立することを仮定し、 $n=k+1$ で②が成立することを示す

このとき、①より

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= g(a_k) \\ &= g\left(\frac{1-R^k}{1+R^k}\right) \\ &= \frac{1-R^{k+1}}{1+R^{k+1}} \end{aligned}$$

となるから、 $n=k+1$ のときも②は成立する

以上、[1], [2] より、任意の自然数 n について②が成り立つことが示された。これより、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-R^n}{1+R^n} \right) \quad \dots \dots \textcircled{3}$$

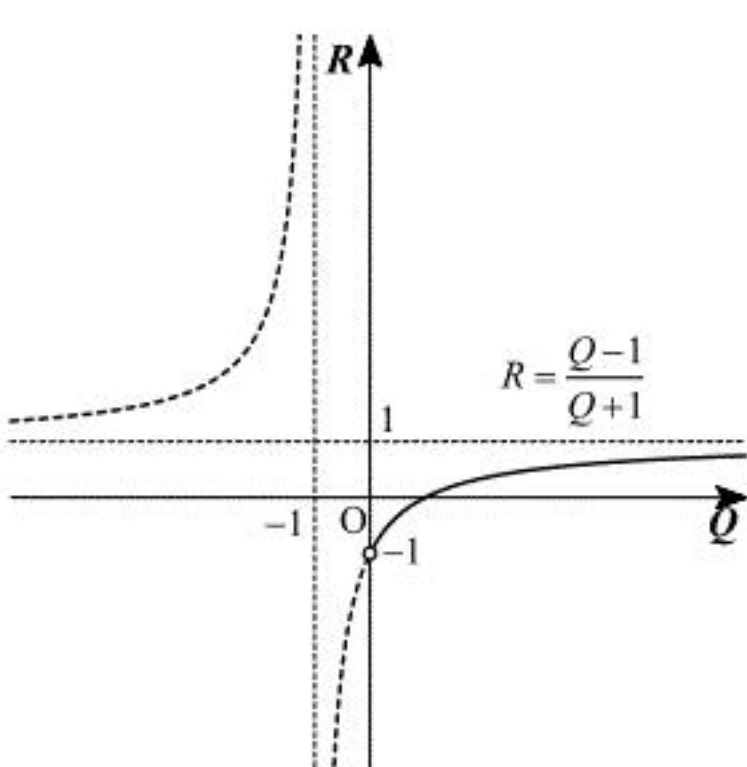
となる。ここで、 $Q = \frac{st-1}{t-s}$ について $s, t > 1$ より $st > 1$ であるから

$$\begin{aligned} s < t &\Leftrightarrow Q > 0 \\ s > t &\Leftrightarrow Q < 0 \end{aligned}$$

であり、 $R = \frac{Q-1}{Q+1}$ について、これを变形すると

$$R = 1 - \frac{2}{Q+1}$$

となるから、 QR 平面上に図示すると以下の図のようになる。ただし、実線部は $Q > 0$ の部分であり、点線部は $Q < 0$ の部分である。



したがって、 $Q > 0$ のとき $|R| < 1$ となり、 $Q < 0$ のとき $\left|\frac{1}{R}\right| < 1$ となることがわかるから、 $s < t$ のとき $|R| < 1$ であるため

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-R^n}{1+R^n} \right) \\ &= \frac{1-0}{1+0} \\ &= 1 \end{aligned}$$

となり、 $s > t$ のとき $\left|\frac{1}{R}\right| < 1$ であるため

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-R^n}{1+R^n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\left(\frac{1}{R}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{R}\right)^n + 1} \right\} \\ &= \frac{0-1}{0+1} \\ &= -1 \end{aligned}$$

となる。

IV

【解答】

〔1〕	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
	1	$\frac{n+2}{m^3}$	3	1, 2
〔2〕	$\frac{1}{4}$			
	$\frac{7}{36}$			
〔3〕	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$		
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$		
〔4〕	$\frac{1}{2}$			
	$\frac{1}{18}$			

【解説】

〔1〕

2個のサイコロを投げたとき、出る目の組み合わせの総数は
 $6^2=36$ [通り]
であり、これらは同様に確からしく起こることに注意する。また、 m, n は1以上6以下の整数であることに注意する。

$$f(x)=x^3-\frac{3}{m^2}x+\frac{n}{m^3} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - \frac{3}{m^2} \\ &= 3\left(x^2 - \frac{1}{m^2}\right) \\ &= 3\left(x - \frac{1}{m}\right)\left(x + \frac{1}{m}\right) \end{aligned}$$

より、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	...	$-\frac{1}{m}$	...	$\frac{1}{m}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{n+2}{m^3}$	$\searrow$	$\frac{n-2}{m^3}$	$\nearrow$

したがって、 $f(x)$ は $x=-\frac{1}{m}$ のとき極大値 $\frac{n+2}{m^3}$ をとる。また、

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{k}{m}\right) &< 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{k^3}{m^3} + \frac{3k}{m^3} + \frac{n}{m^3} &< 0 \\ \Leftrightarrow -k^3 + 3k + n &< 0 \\ \Leftrightarrow k^3 - 3k &> n \end{aligned}$$

がどんな n に対しても成り立つのは、 n の最大値が6であることより

$$k^3 - 3k > 6$$

が成り立つときである。上の式は $k=1, 2$ のとき成り立たず、 $k=3$ のときにはじめて成り立つ

から、どんな n に対しても $f\left(-\frac{k}{m}\right) < 0$ を満たす最小の自然数 k は3である。以上より、 m, n

の値にかかわらず

$$f\left(-\frac{3}{m}\right) < 0, f\left(-\frac{1}{m}\right) > 0$$

となるため、 $f(x)=0$ の解は

$$-\frac{3}{m} < x < -\frac{1}{m}$$

の範囲に少なくとも一つ存在する。また、この範囲には $m=1$ のとき整数-2が存在し、 $m=2$ のとき整数-1が存在するが、 $m \geq 3$ のとき

$$-1 \leq -\frac{3}{m} < -\frac{1}{m} < 0$$

であるからこの範囲に整数は存在しない。

〔2〕

$f(x)$ の極大値 $f\left(-\frac{1}{m}\right)=\frac{n+2}{m^3}$ が整数となるとき、 n がサイコロの目であることより

$$3 \leq n+2 \leq 8$$

であるから、

$$\begin{aligned} m^3 &\leq 8 \\ \Leftrightarrow m &\leq 2 \end{aligned}$$

が必要である。 $m=1$ のとき極大値は $n+2$ であるから、任意の n すなわち $n=1, 2, 3, 4, 5, 6$ の

とき極大値は整数となる。 $m=2$ のとき極大値は $\frac{n+2}{8}$ であるから、 $n=6$ のときに限り極大値

は整数となる。以上より、 $f(x)$ の極大値が整数となる確率は

$$\frac{6+1}{36} = \frac{7}{36}$$

である。

〔3〕

$f(x)$ の極大値 $\frac{n+2}{m^3}$ は m, n の値によらず正である。したがって、3次方程式 $f(x)=0$ が相異なる3つの実数解をもつのは、 $f(x)$ の極小値 $\frac{n-2}{m^3}$ が

$$\begin{aligned} \frac{n-2}{m^3} &< 0 \\ \Leftrightarrow n &< 2 \\ \therefore n &= 1 \end{aligned}$$

を満たすときであり、その確率は $\frac{1}{6}$ である。また、 $f(x)=0$ が2重解をもつのは

$$\begin{aligned} \frac{n-2}{m^3} &= 0 \\ \Leftrightarrow n &= 2 \end{aligned}$$

となるときであるから、その確率は $\frac{1}{6}$ である。

〔4〕

$$f\left(\frac{2}{m}\right) = \frac{n+2}{m^3} > 0$$

であるから、〔1〕の増減表より $x \geq \frac{2}{m}$ で $f(x) > 0$ となる。同様に $f\left(-\frac{3}{m}\right) < 0$ であるから、〔1〕

の増減表より $x \leq -\frac{3}{m}$ で $f(x) < 0$ となる。したがって、 $f(x)=0$ のすべての実数解は

$$-\frac{3}{m} < x < \frac{2}{m} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

の範囲に存在する。以下、 $f(x)=0$ が整数解をもつ条件を m の値で場合分けして考える。

〔1〕 $m=1$ のとき

②より $f(x)=0$ の解は

$$-3 < x < 2$$

の範囲に存在する。①より

$$f(x) = x^3 - 3x + n$$

であるから、 $f(x)=0$ が整数解をもつのは

$$\begin{aligned} &\begin{cases} f(-2)=0 \\ f(-1)=0 \\ f(0)=0 \\ f(1)=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} n-2=0 \\ n+2=0 \\ n=0 \\ n-2=0 \end{cases} \end{aligned}$$

のいずれかが成り立つとき、すなわち $n=2$ のときである。

〔2〕 $m=2$ のとき

②より $f(x)=0$ の解は

$$-\frac{3}{2} < x < 1$$

の範囲に存在する。①より

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{n}{8}$$

であるから、 $f(x)=0$ が整数解をもつのは

$$\begin{aligned} &\begin{cases} f(-1)=0 \\ f(0)=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \frac{n-2}{8}=0 \\ \frac{n}{8}=0 \end{cases} \end{aligned}$$

のいずれかが成り立つとき、すなわち $n=2$ のときである。

〔3〕 $m \geq 3$ のとき

②を満たす整数 x は $x=0$ のみであるから、 $f(x)=0$ が整数解をもつのは①より

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{n}{m^3} &= 0 \end{aligned}$$

となるときであるが、これを満たす m, n の組は存在しないため $f(x)=0$ は整数解をもたない。

以上〔1〕、〔2〕、〔3〕より、 $f(x)=0$ が整数解を持つのは $(m, n)=(1, 2), (2, 2)$ のときであるから、その確率は

$$\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

である。