

【解答】

[1]	ア	イ	ウ	エ			
	-2	-4	$-\frac{2}{3}$	$\frac{13}{27}$			
[2]	オ	カ	キ	ク			
	6	2	16	$\frac{16}{17}$			
[3]	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ
	$-3x+6$	$\frac{3}{2}$	x	$\frac{3}{2}$	5	$3x-10$	5
	タ	チ					
	$\frac{6-k}{3}$	k					

【解説】

[1] 関数 $f(x)=3x^2+2px+q$ の原始関数の一つを $F(x)$ とおく。このとき、関数 $g(x)$ は

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{-1}^x f(t) dt \\ &= F(x) - F(-1) \end{aligned}$$

と表せるから、導関数 $g'(x)$ は

$$\begin{aligned} g'(x) &= F'(x) \\ &= f(x) \\ &= 3x^2 + 2px + q \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。 $x=2$ で極小値をとるためには、 $g'(2)=0$ となる必要があるから、 $\textcircled{1}$ に $x=2$ を代入することにより、

$$4p+q+12=0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

を得る。また、 $g(x)$ を計算すると

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{-1}^x (3t^2 + 2pt + q) dt \\ &= \left[t^3 + pt^2 + qt \right]_{-1}^x \\ &= (x^3 + px^2 + qx) - \{ (-1)^3 + p(-1)^2 + q(-1) \} \\ &= x^3 + px^2 + qx + (-p + q + 1) \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{3}$$

となるから、 $g(2)=-9$ となることより、 $\textcircled{3}$ に $x=2$ を代入することで

$$\begin{aligned} 3p+3q+9 &= -9 \\ \Leftrightarrow p+q+6 &= 0 \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{4}$$

を得る。よって、 $\textcircled{2}$ 、 $\textcircled{4}$ を連立して解くと、 p, q の値は

$$\begin{cases} 4p+q+12=0 \\ p+q+6=0 \end{cases} \quad \therefore (p, q) = (-2, -4)$$

と求まる。逆に、このとき関数 $f(x), g(x)$ は

$$\begin{aligned} g(x) &= x^3 - 2x^2 - 4x - 1 \\ g'(x) &= f(x) = 3x^2 - 4x - 4 = (3x+2)(x-2) \end{aligned}$$

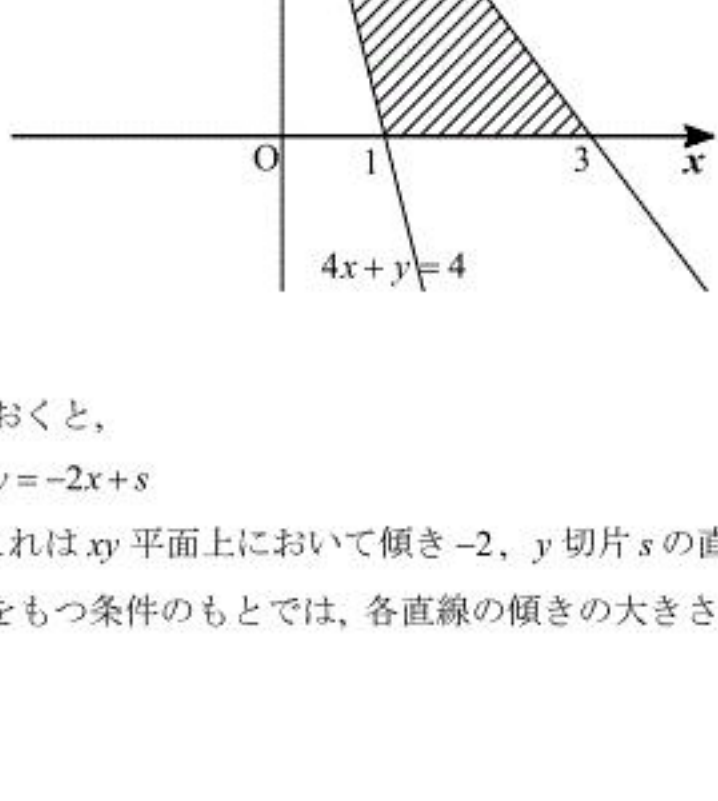
となるから、 $g(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	$\nearrow$	$\frac{13}{27}$	$\searrow$	-9	$\nearrow$

したがって、 $g(x)$ は $x=2$ で極小値 -9 をとることが確認され、さらに $x=-\frac{2}{3}$ で極大値 $\frac{13}{27}$ をとることがわかる。

[2]

xy 平面上において連立方程式 $4x+y \geq 4$ 、 $4x+3y \leq 12$ 、 $y \geq 0$ の表す領域を図示すると、以下の図の斜線部のようになる。



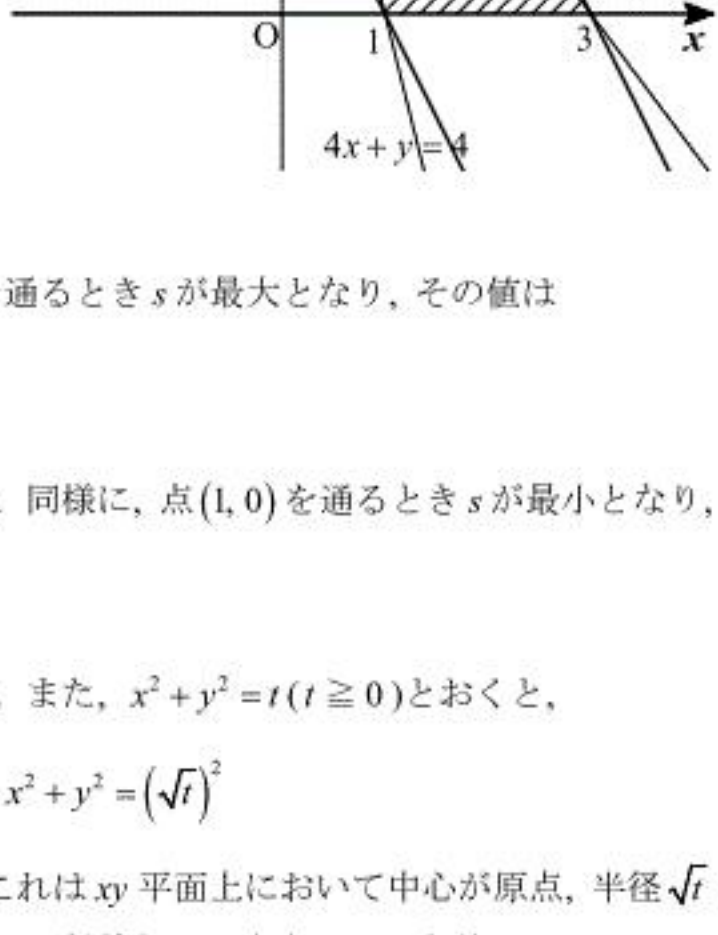
ここで、 $2x+y=s$ とおくと、

$$2x+y=s \Leftrightarrow y=-2x+s$$

と変形できるから、これは xy 平面上において傾き -2 、 y 切片 s の直線を表す。この直線が上の図の斜線部と共有点をもつ条件のもとでは、各直線の傾きの大きさに注意して考えると、

$$-4 < -2 < -\frac{4}{3}$$

より、



この直線が点 $(3,0)$ を通るとき s が最大となり、その値は

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3 + 0 &= s \\ \therefore s &= 6 \end{aligned}$$

であることがわかる。同様に、点 $(1,0)$ を通るとき s が最小となり、その値は

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1 + 0 &= s \\ \therefore s &= 2 \end{aligned}$$

であることがわかる。また、 $x^2+y^2=t$ ($t \geq 0$) とおくと、

$$x^2+y^2=t \Leftrightarrow x^2+y^2=(\sqrt{t})^2$$

と変形できるから、これは xy 平面上において中心が原点、半径 $\sqrt{t}$ の円 ($t=0$ のときは原点) を表す。この円が上の図の斜線部と共有点をもつ条件のもとでは、原点からの距離を考えて



この円が点 $(0,4)$ を通るとき t が最大となり、その値は

$$\begin{aligned} 0^2 + 4^2 &= t \\ \therefore t &= 16 \end{aligned}$$

であることがわかる。一方、この円が上の図のように直線 $4x+y=4$ と接するとき t が最小となり、その値は、点と直線の距離公式より

$$\begin{aligned} \left(\frac{|0+0-4|}{\sqrt{4^2+1^2}} \right)^2 &= t \\ \therefore t &= \frac{16}{17} \end{aligned}$$

であることがわかる。

[3] (a)

与えられた式を変形して、整理すると

$$\begin{aligned} P(x) &= \left| \sqrt{4x^2 - 12x + 9} + \sqrt{x^2 - 10x + 25} - 2 \right| \\ &= \left| \sqrt{(2x-3)^2} + \sqrt{(x-5)^2} - 2 \right| \\ &= \left| |2x-3| + |x-5| - 2 \right| \end{aligned}$$

となる。以下、 x と $\frac{3}{2}, 5$ の大小で場合分けして考える。

[1] $x < \frac{3}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} |2x-3| &= -(2x-3), |x-5| = -(x-5) \text{ となるから} \\ P(x) &= |-(2x-3) - (x-5) - 2| \\ &= |-3x+6| \end{aligned}$$

となる。また、 $x < \frac{3}{2}$ のとき $-3x+6 = -3x+6$ となるから、 $P(x)$ は

$$P(x) = -3x+6$$

である。

[2] $\frac{3}{2} \leq x < 5$ のとき

$$\begin{aligned} |2x-3| &= 2x-3, |x-5| = -(x-5) \text{ となるから} \\ P(x) &= |(2x-3) - (x-5) - 2| \\ &= |x| \end{aligned}$$

となる。また、 $\frac{3}{2} \leq x < 5$ のとき $|x| = x$ となるから、 $P(x)$ は

$$P(x) = x$$

である。

[3] $5 \leq x$ のとき

$$\begin{aligned} |2x-3| &= 2x-3, |x-5| = x-5 \text{ となるから} \\ P(x) &= |(2x-3) + (x-5) - 2| \\ &= |3x-10| \end{aligned}$$

となる。また、 $5 \leq x$ のとき $|3x-10| = 3x-10$ となるから、 $P(x)$ は

$$P(x) = 3x-10$$

である。

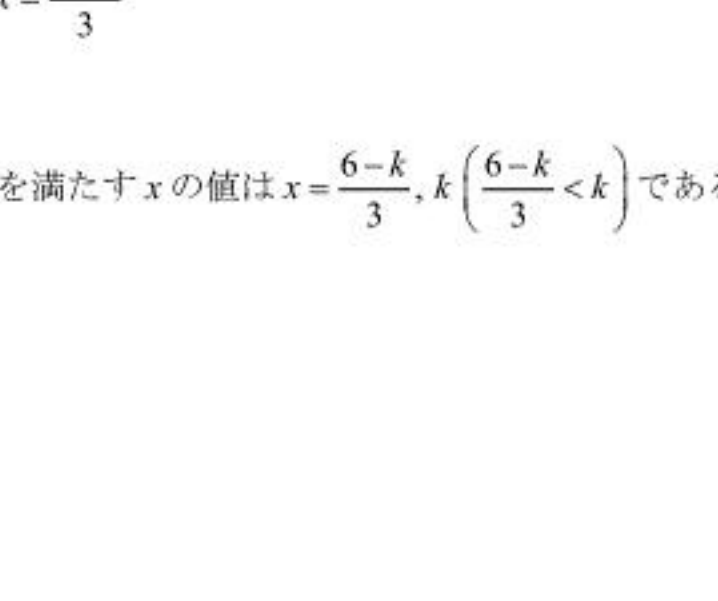
以上[1]-[3]より、 $P(x)$ は

$$P(x) = \begin{cases} -3x+6 & (x < \frac{3}{2}) \\ x & (\frac{3}{2} \leq x < 5) \\ 3x-10 & (5 \leq x) \end{cases}$$

となる。

(b)

(a)の結果より、 xy 平面上において関数 $y=P(x)$ の表すグラフと直線 $y=k$ を図示すると、以下の図のようになる。



よって、 $\frac{3}{2} < k < 5$ のとき、折れ線 $y=P(x)$ と直線 $y=k$ の交点は2つあり、それぞれ直線 $y=-3x+6$ と直線 $y=k$ の交点、直線 $y=x$ と直線 $y=k$ の交点であることがわかる。ここで、

$$\begin{aligned} -3x+6 &= k \Leftrightarrow x = \frac{6-k}{3} \\ x &= k \end{aligned}$$

より、方程式 $P(x)=k$ を満たす x の値は $x = \frac{6-k}{3}, k \left(\frac{6-k}{3} < k \right)$ であることがわかる。

II

〔解答〕

〔2〕	ツ	テ	ト
	2	D	E
〔3〕	ナ	ニ	
	34	F	
〔4〕	ヌ	ネ	
	481	C	

〔解説〕

〔1〕

1回目のグループ化の手順により、距離が1である点Aと点Bが同じグループとなる。

〔2〕

点D(15, 5)と点E(16, 6)との距離は、

$$\sqrt{(16-15)^2+(6-5)^2}=\sqrt{2}(<2)$$

である。ここで点A, Bの重心 G_{AB} の座標は $\left(6, \frac{31}{2}\right)$ であり、点A, Bと点D, Eを除く任意の2

点(G_{AB} を含む)はx座標が2以上異なるので、点A, Bと点D, Eを除く任意の2点間の距離は2以上である。以上から、距離が $\sqrt{2}$ である点Dと点Eが1つのグループとなることが分かる。

〔3〕

未だグループ化されていない点は点Cと点Fの2点である。ここで、グループ{D, E}の重心の座標は、

$$\left(\frac{15+16}{2}, \frac{5+6}{2}\right) \therefore \left(\frac{31}{2}, \frac{11}{2}\right)$$

であるから、点Fとグループ{D, E}の重心との距離は、

$$\sqrt{\left(18-\frac{31}{2}\right)^2+\left(4-\frac{11}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{34}}{2}$$

と計算できる。一方、点Cとグループ{D, E}の重心のx座標の差は、

$$\frac{31}{2}-11=\frac{9}{2}>\frac{\sqrt{34}}{2}$$

〔4〕

未だグループ化されていない点は点Cのみである。グループ{A, B}の重心の座標は、

$$\left(\frac{6+6}{2}, \frac{15+16}{2}\right) \therefore \left(6, \frac{31}{2}\right)$$

であり、グループ{D, E, F}の重心の座標は、

$$\left(\frac{15+16+18}{3}, \frac{5+6+4}{3}\right) \therefore \left(\frac{49}{3}, 5\right)$$

である。従って、点Cとグループ{A, B}の重心との距離は、

$$\sqrt{(11-6)^2+\left(10-\frac{31}{2}\right)^2}=\sqrt{5^2+\left(\frac{11}{2}\right)^2}$$

で表され、点Cとグループ{D, E, F}の重心との距離は、

$$\sqrt{\left(11-\frac{49}{3}\right)^2+(10-5)^2}=\sqrt{\left(\frac{16}{3}\right)^2+5^2}$$

で表されることが分かる。ここで、

$$\frac{11}{2}>\frac{16}{3}$$

より、

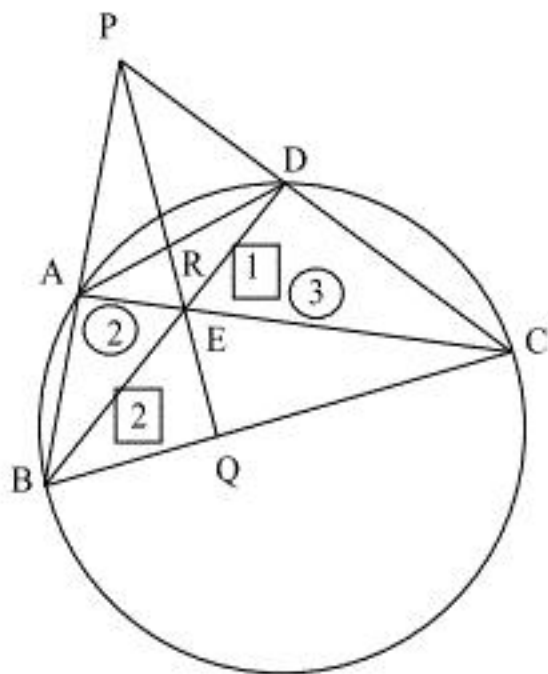
$$\sqrt{5^2+\left(\frac{11}{2}\right)^2}>\sqrt{\left(\frac{16}{3}\right)^2+5^2}$$

を得るので、点Cと最も近い重心をもつグループはグループ{D, E, F}であり、それらの距離は、

$$\sqrt{\left(\frac{16}{3}\right)^2+5^2}=\frac{\sqrt{481}}{3}$$

である。

Ⅲ



[1]

方べきの定理より、

$$\begin{aligned} &AE \cdot EC = BE \cdot ED \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{5}AC \cdot \frac{3}{5}AC = \frac{2}{3}BD \cdot \frac{1}{3}BD \\ &\Leftrightarrow BD^2 = \frac{27}{25}AC^2 \\ &\therefore BD = \frac{3\sqrt{3}}{5}AC \quad (\because BD > 0, AC > 0) \end{aligned}$$

と計算できるので、 $AC=15$ より、

$$\begin{aligned} BD &= \frac{3\sqrt{3}}{5} \cdot 15 \\ &= 9\sqrt{3} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $BD=9\sqrt{3}$

[2]

実数 s, t を用いて、

$$\overrightarrow{PA} = s\vec{b}, \overrightarrow{PD} = t\vec{c}$$

とおく。点 E は線分 AC 上の点であるから、

$$\overrightarrow{PE} = \frac{3}{5}s\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{c} \quad \dots\dots ①$$

と表せる。また、点 E は線分 BD 上の点であるから、

$$\overrightarrow{PE} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}t\vec{c} \quad \dots\dots ②$$

と表せる。①と②の計数を比較して、

$$\begin{cases} \frac{3}{5}s = \frac{1}{3} \\ \frac{2}{5}t = \frac{2}{3} \end{cases} \therefore (s, t) = \left(\frac{5}{9}, \frac{3}{5} \right)$$

と求まる。したがって、

$$\overrightarrow{PE} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{c}$$

である。また、点 Q は直線 PE 上の点であるから、実数 p を用いて、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= p\overrightarrow{PE} \\ &= \frac{1}{3}p\vec{b} + \frac{2}{5}p\vec{c} \end{aligned}$$

と表せる。点 Q は線分 BC 上の点であるから、

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}p + \frac{2}{5}p &= 1 \\ \therefore p &= \frac{15}{11} \end{aligned}$$

と求まる。したがって、

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{5}{11}\vec{b} + \frac{6}{11}\vec{c}$$

となる。また、点 R は直線 PE 上の点であるから、実数 q を用いて、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PR} &= q\overrightarrow{PE} \\ &= \frac{1}{3}q\vec{b} + \frac{2}{5}q\vec{c} \\ &= \frac{3}{5}q\overrightarrow{PA} + \frac{2}{3}q\overrightarrow{PD} \end{aligned}$$

と表せる。点 R は線分 AD 上の点であるから、

$$\begin{aligned} \frac{3}{5}q + \frac{2}{3}q &= 1 \\ \therefore q &= \frac{15}{19} \end{aligned}$$

と求まる。したがって、

$$\overrightarrow{PR} = \frac{5}{19}\vec{b} + \frac{6}{19}\vec{c}$$

となる。

(答) $\overrightarrow{PE} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{c}, \overrightarrow{PQ} = \frac{5}{11}\vec{b} + \frac{6}{11}\vec{c}, \overrightarrow{PR} = \frac{5}{19}\vec{b} + \frac{6}{19}\vec{c}$

[3]

条件より、

$$\frac{AE}{AC} = \frac{2}{5}, \frac{DE}{BD} = \frac{1}{3}$$

である。また、[2] より、

$$PE:EQ=11:4$$

であるから、

$$\frac{QE}{PQ} = \frac{4}{15}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} \frac{AE}{AC} + \frac{DE}{BD} + \frac{QE}{PQ} &= \frac{2}{5} + \frac{1}{3} + \frac{4}{15} \\ &= 1 \end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)

[4]

円周角の定理より、

$$\angle PBD = \angle PCA$$

である。また、 $\angle P$ 共通であることから、

$$\triangle PBD \sim \triangle PCA$$

が成り立つ。したがって、

$$\begin{aligned} PB:PC &= BD:AC \\ \Leftrightarrow PB \cdot AC &= PC \cdot BD \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、[1] より、

$$\begin{aligned} \frac{PB}{PC} &= \frac{BD}{AC} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{5} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{PB}{PC} = \frac{3\sqrt{3}}{5}$