（第３時限：100分）

2015年度　②

数　学　問　題

（理　　系）

（全４ページ）

注　意　事　項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 問題文の $\boxed{}$ にあてはまる適当なものを，解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
3. 解答用紙１枚・下書用紙２枚は，この冊子の中に折り込んであります。
4. 試験終了後，問題冊子・下書用紙は持ち帰りなさい。

数　学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの設問について問題文の $\boxed{}$ にあてはまる適当なものを，解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

Ⅰ　O を原点とする座標平面上の点 P$(2\cos t,\ \sin t)$ から直線 $ax+\sqrt{1-a^2}\,y=0$ におろした垂線の足を点 H とする。ただし，$-1 \leqq a \leqq 1$ とする。

線分 PH の長さ h は

$$h=\left|\ \boxed{\text{ア}}\cos t+\boxed{\text{イ}}\sin t\ \right|$$

である。

t が $0 \leqq t \leqq 2\pi$ の範囲を動くとき，点 P の座標が $\left(\pm\boxed{\text{ウ}},\ \pm\boxed{\text{エ}}\right)$（複号同順）のとき h は最大値 $\boxed{\text{オ}}$ をとる。このときの $\angle\mathrm{OPH}$ を θ_0 とする。$\cos\theta_0$ は a を用いて表すと

$$\cos\theta_0=\boxed{\text{カ}}$$

である。

関数 $f(a)=\boxed{\text{カ}}$ は定義域 $-1 \leqq a \leqq 1$ において，$a=\boxed{\text{キ}}$ のとき最小値 $\boxed{\text{ク}}$ をとり，$a=\boxed{\text{ケ}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{コ}}$ をとる。

II　$y=f(x)$ を $y=\sin x\left(0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数とする。

〔1〕 $f(x)$ の定義域は $\boxed{\text{サ}}\leqq x<\boxed{\text{シ}}$ であり，$f'(x)=\boxed{\text{ス}}$ である。

部分積分法を用いると，

$$\int f(x)\,dx=xf(x)-\int xf'(x)\,dx=xf(x)+\boxed{\text{セ}}+C$$

を得る。ただし，C は積分定数とする。

〔2〕 $\boxed{\text{サ}}\leqq x<\boxed{\text{シ}}$ を満たす x について関数 $g(x)$ を

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

と定める。このとき，

$$g(x)=xf(x)+\boxed{\text{ソ}}$$

であり，とくに $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\boxed{\text{タ}}$ である。また，

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\boxed{\text{ソ}}\,dx=\boxed{\text{チ}}$$

である。以上の結果と部分積分法を用いると，

$$\int_0^{\frac{1}{2}}g(x)\,dx=\boxed{\text{ツ}}$$

である。

（$\boxed{\text{ス}}$，$\boxed{\text{セ}}$，$\boxed{\text{ソ}}$ は x を用いて答えよ。）

Ⅲ　2つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ に対して

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (a_k)^2, \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} (b_k)^2, \quad U_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

とおく。

〔1〕 $a_n = 2^n$，$b_n = r^n \ (r > 1)$ のとき，$S_n = \boxed{\text{テ}}$ であり，

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(U_n)^2}{S_n T_n} = \boxed{\text{ト}}$$

である。この右辺は，$r = \boxed{\text{ナ}}$ のとき，最大値 $\boxed{\text{ニ}}$ をとる。

〔2〕 $a_n = 2^n$，$b_n = n + 1$ のとき，$T_n = \boxed{\text{ヌ}}$，$U_n = \boxed{\text{ネ}}$ である。また，

$$\lim_{n \to \infty} n \cdot \frac{(U_n)^2}{S_n T_n} = \boxed{\text{ノ}}$$

である。

Ⅳ　1個のサイコロを投げる試行により，点Aが数直線上を動く。点Aは始め原点にあり，3以上の目が出たら正の方向に1移動し，1，2の目が出たら負の方向に1移動する。

〔1〕　3回目の試行で点Aの座標が1となる確率は $\boxed{\text{ハ}}$ である。また，3回目の試行で点Aの座標が1となり，かつ6回目の試行で点Aが原点にある確率は $\boxed{\text{ヒ}}$ である。

〔2〕　$n-1$ 回までの試行では点Aの座標が4より小さく，n 回目の試行で点Aの座標が初めて4になる確率を $P(n)$ とする。このとき
$P(6) = \boxed{\text{フ}}$ であり，$P(8) = \boxed{\text{ヘ}}$ である。また，8回までの試行で点Aの座標が少なくとも1回4となる確率は $\boxed{\text{ホ}}$ である。

〔3〕　100回目の試行で点Aの座標が m となる確率を $Q(m)$ とする。
$-50 \leqq k < 50$ を満たす整数 k に対して，$Q(2k+1) = \boxed{\text{マ}}$ であり，
$\dfrac{Q(2k+2)}{Q(2k)} = \boxed{\text{ミ}}$ である。よって，$Q(m)$ は $m = \boxed{\text{ム}}$ において最大値をとる。