

(第3時限：100分)

2015年度 ②

数 学 問 題

(全4ページ)

薬学方式専用

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 問題文の にあてはまる適当なものを、解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
3. 解答用紙2枚・下書用紙2枚は、この冊子の中に折り込んであります。
4. 試験終了後、問題冊子・下書用紙は持ち帰りなさい。

数 学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの設問について問題文の にあてはまる適当なものを，解答用紙の所定の欄に記入しなさい。なお解答が分数になる場合はすべて既約分数で答えること。

Ⅰ

- 〔1〕 x と y をともに正の整数とする。このとき，次の等式が成り立つような x をすべて求めると， ア である。

$$\log_y (x^3 + 6x^2 - 9x - 34) - \log_y (x + 2) = 2$$

- 〔2〕 赤玉，白玉，青玉，黄玉がそれぞれ2個ずつ，合計8個ある。このとき，次のように並べる方法を求めよ。ただし，同じ色の玉は区別がつかないものとする。

- (a) 8個の玉から4個取り出して直線上に並べる方法は イ 通りである。
(b) 8個の玉から4個取り出して円周上に並べる方法は ウ 通りである。

- 〔3〕 半径 r の円に内接する四角形 ABCD を考える。辺 AB および辺 AD の長さはいずれも a であり， $\angle BAD$ の大きさは θ であるとする。

- (a) 対角線 BD の長さを r と θ を用いて表すと， エ である。また， $\cos \theta$ を r と a を用いて表すと， オ である。

- (b) $a = 2$ ， $r = \sqrt{5}$ のとき，対角線 BD の長さは カ である。この条件のもとで，四角形 ABCD の面積の最大値は キ である。

- 〔4〕 $\alpha = 72^\circ$ とする。このとき， $\cos 3\alpha - \cos 2\alpha$ の値は ク である。

よって， $\cos \alpha$ の値は ケ となり， $\cos^2 \frac{\alpha}{2}$ は コ である。

Ⅱ 関数 $f(x) = x^3 - 3x^2$ について、次の各問いに答えよ。

〔1〕 関数 $f(x)$ は、 $x =$ のとき極大値 であり、 $x =$ のとき極小値 である。

〔2〕 曲線 $C_1: y = f(x)$ の接線について考える。

(a) 傾き m の接線の本数は、 $m =$ のとき1本、 $m >$ のとき2本である。

(b) 傾き m の接線が2本あるとき、接点を A, B とし、その x 座標をそれぞれ α, β ($\alpha > \beta$) とすると、

$$\alpha + \beta = \text{カ}, \quad \alpha\beta = \text{キ}$$

である。したがって、線分 AB の中点の座標は $(\text{ク}, \text{ケ})$ となる。

(c) (b) の接点 A, B が直線 $l: y = 6x - 8$ 上の点であるとするとき、2点 A, B を通る放物線 C_2 を考える。このとき、点 A における放物線 C_2 の接線は、点 A における曲線 C_1 の接線と等しいものとする。放物線 C_2 の方程式は、

$$y = \text{コ}$$

である。また、この放物線 C_2 と直線 l で囲まれる部分の面積は である。

Ⅲ 夫婦と子供 1 人の 3 人家族が新車を購入することになった。車体の色を決める際、父親は白、母親と子供は赤と意見が分かれた。したがって、以下に述べる方法を用いて車体の色を決定することにした。

まず、中身の見えない袋の中に白球 1 個と赤球 2 個を入れる。この袋から無作為に球 1 個を取り出し、その色を記録して袋に戻す。この操作を繰り返し、どちらかの色が 3 つ多く記録されたときに操作は終了し、その色を車体の色として決定する。

〔1〕 この操作が 3 回目で終了し、車体の色が白になる確率は である。3 回目の操作で白が 1 つ多く記録されている確率は である。3 回目の操作で赤が 1 つ多く記録されている確率は である。

〔2〕 この操作が 3 回目で終了せず、4 回目の操作を行ったとき、記録されている白と赤の差は または である。以降の偶数回目の操作でも同じことになるので、偶数回目の操作で車体の色が決定する確率は である。

〔3〕 車体の色が決定していない場合、 $2n - 1$ 回目 (n は自然数) の操作で白が 1 つ多く記録されている確率を a_n 、赤が 1 つ多く記録されている確率を b_n とする。このとき、 $a_1 = \frac{1}{3}$ 、 $b_1 = \frac{2}{3}$ であり、

$$a_{n+1} = \text{キ} a_n + \text{ク} b_n \cdots \cdots \text{①}$$

$$b_{n+1} = \text{ケ} a_n + \text{コ} b_n \cdots \cdots \text{②}$$

である。①、②を満たす数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ について、数列 $\{a_n + ab_n\}$ が等比数列になるものとする。

このとき、 α は または である。ただし、 $>$ とする。

よって、数列 $\{a_n + ab_n\}$ の一般項は $\alpha = \text{サ}$ のとき 、
 $\alpha = \text{シ}$ のとき である。したがって、 $a_n = \text{ソ}$ である。

〔4〕 $2n + 1$ 回目の操作で車体の色が白に決まる確率は である。

IV 座標空間において、5点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 1)$, $D(2, 2, 2)$ があり、3点 A, B, C を含む平面を α とする。このとき、次の各問いに答えよ。

[1] $\overrightarrow{OD}$ を $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ を用いて表すと、 $\overrightarrow{OD} = \boxed{\text{ア}}$ である。次に、点 E を $\overrightarrow{OE} = t\overrightarrow{OD}$ (t は実数) とすると、点 E が平面 α 上にある条件は $t = \boxed{\text{イ}}$ である。

[2] 平面 α に垂直な単位ベクトル $\vec{e}$ の成分は $(\boxed{\text{ウ}}, \boxed{\text{エ}}, \boxed{\text{オ}})$ である。ただし、 $\boxed{\text{ウ}}$ は正とする。

[3] t は条件 $\boxed{\text{イ}} \leq t \leq 1$ を満たしているとする。

まず、点 E から平面 α に下した垂線と平面 α との交点を点 G とする。

このとき、垂線 EG の長さを t を用いて表すと $\boxed{\text{カ}}$ ，点 G の座標を t を用いて表すと $(\boxed{\text{キ}}, \boxed{\text{ク}}, \boxed{\text{ケ}})$ である。

次に、線分 AB を一辺とし点 G が重心となる三角形を $\triangle ABF$ とするとき、 t を用いると、点 F の座標は $(\boxed{\text{コ}}, \boxed{\text{サ}}, \boxed{\text{シ}})$ である。点 F は t の条件を満たしながら動き、 $\triangle ABF$ は形を変える。このとき、点 F の軌跡は点 G の軌跡に平行であるから、すべての $\triangle ABF$ によりおおわれる図形の面積は、 $\boxed{\text{ス}}$ である。

