

(第3時限：100分)

2015年度 ③

# 数 学 問 題

(理 系)

(全4ページ)

## 注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 問題文の  にあてはまる適当なものを、解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
3. 解答用紙1枚・下書用紙2枚は、この冊子の中に折り込んであります。
4. 試験終了後、問題冊子・下書用紙は持ち帰りなさい。

## 数 学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの設問について問題文の  にあてはまる適当なものを，  
解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

Ⅰ  $a$  を実数とし，関数  $f(x) = ax^2 + e^{-x^2}$  について考える。

必要ならば， $\lim_{t \rightarrow \infty} te^{-t} = 0$  を用いてよい。

〔1〕  $a = 0$  のとき， $f(x)$  は  $x = \pm$   ア  で変曲点をもつ。

〔2〕  $a = 0$  のとき， $f''(x)$  は  $x =$   イ  で最小値  ウ  をとり， $x =$   エ   
で最大値  オ  をとる。

〔3〕  $0 < a <$   カ  のとき， $f(x)$  は異なる2つの  $x = \pm$   キ  で最小値  
 ク  をとる。

〔4〕  $f(x)$  は  ケ   $< a < 0$  のとき変曲点を  コ  個もち， $0 \leq a <$   サ   
のとき変曲点を  シ  個もち，それ以外のときは変曲点をもたない。

Ⅱ 座標空間において原点を  $O$  とし, 3 点  $A\left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$ ,  $B(0, 0, 1)$ ,  $C(1, 0, 0)$  を考える.  $\overrightarrow{OB} + s\overrightarrow{BC}$  を位置ベクトルにもつ点を  $P$  とし,  $t\overrightarrow{OA}$  を位置ベクトルにもつ点を  $Q$  とする.  $s, t$  が実数全体を動くとき, 点  $P, Q$  はそれぞれ直線  $BC$ , 直線  $OA$  上を動く。

〔1〕 2 点  $P, Q$  間の距離は  $s, t$  を用いて表すと  $\boxed{\text{ス}}$  である。

$s_1$  を実数とし,  $s = s_1$  のときの点  $P$  を  $P_1$  とすると, 点  $Q$  が点  $P_1$  に最も近づくのは  $t = \boxed{\text{セ}} s_1 + \boxed{\text{ソ}}$  のときである。このときの点  $Q$  を  $Q_1$ ,  $t$  を  $t_1$  とする。

さらに, 点  $P$  が点  $Q_1$  に最も近づくのは  $s = \boxed{\text{タ}} t_1 + \boxed{\text{チ}}$  のときである。

〔2〕 さらに,  $m \geq 2$  のとき,  $s_m, t_m$  を

$$\begin{aligned} s_m &= \boxed{\text{タ}} t_{m-1} + \boxed{\text{チ}}, \\ t_m &= \boxed{\text{セ}} s_m + \boxed{\text{ソ}} \end{aligned}$$

と定める。

数列  $\{s_m\}$  の一般項は  $s_1$  を用いて表すと  $s_m = \boxed{\text{ツ}}$  であり,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_m = \boxed{\text{テ}}, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} t_m = \boxed{\text{ト}}$$

となる。

〔3〕  $s = \boxed{\text{テ}}$ ,  $t = \boxed{\text{ト}}$  のときの点  $P, Q$  をそれぞれ  $P_\infty, Q_\infty$  とする。

このとき, 任意の  $s, t$  について

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_\infty Q_\infty} \cdot \overrightarrow{OP} &= \boxed{\text{ナ}}, \\ \overrightarrow{P_\infty Q_\infty} \cdot \overrightarrow{OQ} &= \boxed{\text{ニ}} \end{aligned}$$

が成り立つ。

Ⅲ  $-1 < x < 1$  で定義された関数  $f_t(x)$  を

$$f_t(x) = \frac{tx-1}{x-t}$$

と定める。ただし  $t > 1$  とする。

$f_t(x)$  の値域は  $\boxed{\text{ヌ}} < f_t(x) < \boxed{\text{ネ}}$  である。

また、

$$f_t(f_t(x)) = \boxed{\text{ノ}}$$

であり、実数  $s$  で  $s \neq t, s > 1$  を満たすものについて  $g(x) = f_s(f_t(x))$  とおくと、

$$g(x) = \frac{\boxed{\text{ハ}}x + \boxed{\text{ヒ}}}{x + \boxed{\text{フ}}}$$

が成り立つ。ここで  $R = \frac{\boxed{\text{ハ}}-1}{\boxed{\text{ハ}}+1}$  とし、 $g\left(\frac{1-R^n}{1+R^n}\right)$  を  $R$  を用いて表すと

$$g\left(\frac{1-R^n}{1+R^n}\right) = \boxed{\text{ヘ}}$$

である。ただし  $n$  は自然数とする。

数列  $\{a_n\}$  を

$$a_1 = \frac{1-R}{1+R},$$

$$a_{n+1} = g(a_n) \quad (n \geq 1)$$

と定めると、 $s < t$  のとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \boxed{\text{ホ}}$$

であり、 $s > t$  のとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \boxed{\text{マ}}$$

である。

Ⅳ 2個のサイコロを投げて出た目をそれぞれ  $m, n$  とする。3次関数

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{m^2}x + \frac{n}{m^3}$$

について考える。

- [1]  $f(x)$  は  $x = -\frac{\boxed{\text{ミ}}}{m}$  のとき極大値  $\boxed{\text{ム}}$  をとる。また、 $f\left(-\frac{k}{m}\right) < 0$  がどんな  $n$  に対しても成り立つような最小の自然数  $k$  は  $\boxed{\text{メ}}$  である。したがって、 $x$  についての3次方程式  $f(x) = 0$  の解が

$$-\frac{\boxed{\text{メ}}}{m} < x < -\frac{\boxed{\text{ミ}}}{m}$$

の範囲に少なくとも一つ存在する。また、 $m = \boxed{\text{モ}}$  のとき、この範囲に整数が存在する。

- [2]  $f(x)$  の極大値が整数となる確率は  $\boxed{\text{ヤ}}$  である。

- [3]  $x$  についての3次方程式  $f(x) = 0$  が相異なる3つの実数解をもつ確率は  $\boxed{\text{ユ}}$  であり、2重解をもつ確率は  $\boxed{\text{ヨ}}$  である。

- [4]  $f(x) = 0$  が整数解をもつ確率は  $\boxed{\text{ラ}}$  である。

