

【解答】

〔1〕	ア	イ	ウ	エ		
	205	296	14	3507		
〔2〕	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
	40	33	30	30	121	11
〔3〕	サ	シ	ス	セ	ソ	タ
	2	6	$-\frac{1}{2}$	0	2	$2 \leq k \leq \frac{14}{3}$

【解説】

〔1〕
 整数 n を用いると、7 で割ると 2 余る数は $7n+2$ と表すことができる。ここで $n=29$ のとき、

$$7n+2=7 \times 29+2=205$$
 であり、 $n=42$ のとき、

$$7n+2=296$$
 となるから、求める数列は初項が 205、末項が 296、項数が $42-29+1=14$ の等差数列となる。
 この数列の初項から末項までの和は、

$$\frac{1}{2} \cdot 14 \cdot (205+296)=3507$$

となる。

〔2〕
 整理すると、
 20 万円が 5 人
 30 万円が 8 人
 40 万円が 4 人
 50 万円が 2 人
 60 万円が 1 人
 となる。よって給与の範囲は 40 万円、平均値は、

$$\frac{20 \times 5+30 \times 8+40 \times 4+50 \times 2+60}{20}=\frac{660}{20}=33 \text{ (万円)}$$

であり、最頻値は 30 万円、中央値は 30 万円である。次に分散は、

$$\frac{(20-33)^2 \times 5+(30-33)^2 \times 8+(40-33)^2 \times 4+(50-33)^2 \times 2+(60-33)^2 \times 1}{20}$$

$$=\frac{2420}{20}$$

$$=121$$

であるから、標準偏差は、

$$\sqrt{121}=11$$
 となる。

〔3〕
 放物線 $y=x^2-4x+10$ の頂点の座標は、

$$y=x^2-4x+10=(x-2)^2+6$$

となるから $(2, 6)$ である。直線 $y=kx+\frac{k}{2}$ は、

$$y=kx+\frac{k}{2}=k\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

より k の値に関わらず定点 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ を通る。放物線②と直線③が接するとき、二式を連立した方程式①が重解を持つから、

$$(k+4)^2-4\left(-\frac{k}{2}+10\right)=0$$

$$\Leftrightarrow k^2+10k-24=0$$

$$\Leftrightarrow (k-2)(k+12)=0$$

$$\therefore k=-12, 2$$

となる。ここで $k=2$ のとき①式より、

$$x^2-6x+9=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2=0$$

$$\therefore x=3$$

となるから、放物線②と直線③は $1 \leq x \leq 4$ の範囲に接点を持つ。また $k=-12$ のとき①式より、

$$x^2+8x+16=0$$

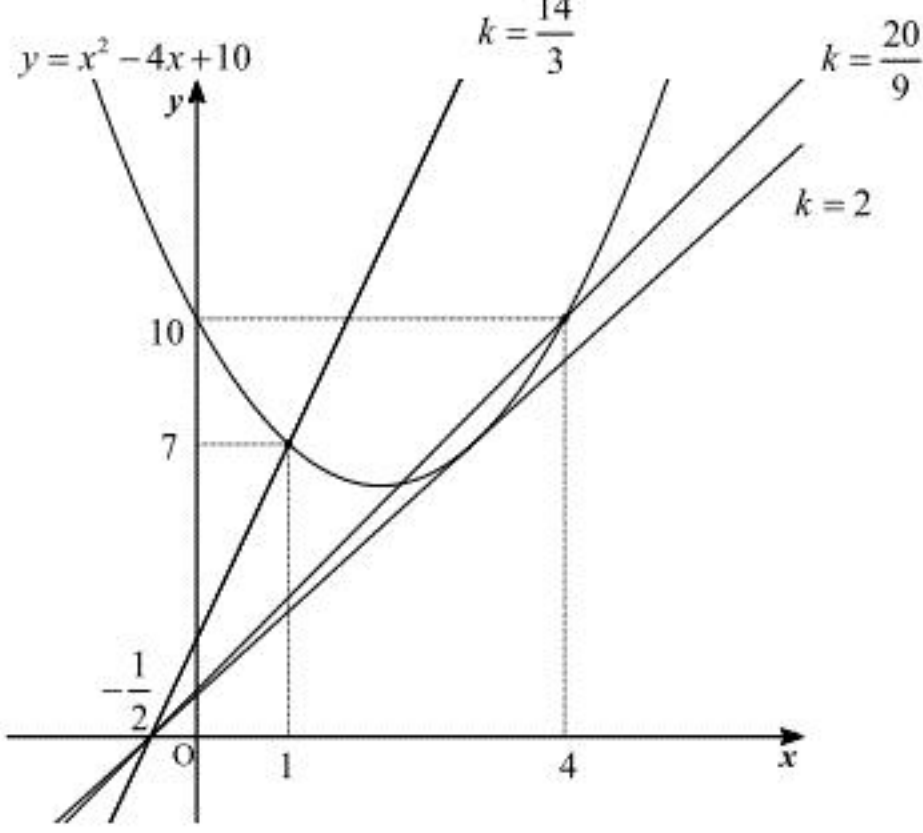
$$\Leftrightarrow (x+4)^2=0$$

$$\therefore x=-4$$

となるから、放物線②と直線③は $1 \leq x \leq 4$ の範囲に接点を持たない。以上より放物線②と直線③が $1 \leq x \leq 4$ の範囲で接するとき、定数 k の値は、

$$k=2$$

である。



以上より、放物線②と直線③の位置関係は上図のようになる。 $2 \leq k \leq \frac{14}{3}$ のとき放物線②と直線③は少なくとも一つの共有点を $1 \leq x \leq 4$ に持つから、求める定数 k の範囲は、

$$2 \leq k \leq \frac{14}{3}$$

となる。

【解答】

ア	イ	ウ	エ	オ
16	104	144	30	360
カ	キ	ク		
18	-1296	168		

【解説】

$C = \frac{1}{3}x^3 - 16x^2 + 360x$ を微分して整理すると、

$$C' = x^2 - 32x + 360 = (x - 16)^2 + 104$$

となる。 $p = 300, x = 6$ のとき、

$$\begin{aligned} Q &= R - C \\ &= 6 \cdot 300 - \left(\frac{1}{3} \cdot 6^3 - 16 \cdot 6^2 + 360 \cdot 6 \right) \\ &= 1800 - 1656 \\ &= 144 \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$Q = R - C = -\frac{1}{3}x^3 + 16x^2 + (p - 360)x$$

であるから、

$$Q' = -x^2 + 32x + p - 360$$

となる。 $p = 300$ のとき、

$$Q' = -x^2 + 32x - 60 = -(x - 2)(x - 30)$$

であり、増減表は以下のようになる。

x	0	...	2	...	30	...
Q'		-	0	+	0	-
Q	0		極小		極大	

増減表より、 Q を最大とするのは、

$$x = 30$$

である。また、 $x = 32$ のとき Q が最大となるのは、 $x = 32$ が $Q' = 0$ の解となるときであるから、

$$\begin{aligned} -32^2 + 32 \cdot 32 + p - 360 &= 0 \\ \therefore p &= 360 \end{aligned}$$

となる。次に、 $p = 108$ のとき、

$$Q' = -x^2 + 32x - 252 = -(x - 14)(x - 18)$$

となるから、 $x = 18$ のとき Q は極大となる。このときの極大値は、

$$Q = -\frac{1}{3} \cdot 18^3 + 16 \cdot 18^2 + (108 - 360) \cdot 18 = -1296$$

となる。

企業が正の利益を得ることができるのは、 Q が $x > 0$ において正となりうるときである。このとき、

$$\begin{aligned} Q &> 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{3}x^3 + 16x^2 + (p - 360)x &> 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{3}x^2 + 16x + p - 360 &> 0 \quad (\because x > 0) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^2 - 16x + 360 &< p \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3}(x - 24)^2 + 168 &< p \end{aligned}$$

となるから、 $p > 168$ のとき $Q > 0$ となりうる。よって求める p の値は 168 である。

Ⅲ

[1]

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 - 4z &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 + (z-2)^2 &= 4\end{aligned}$$

となる。よって球面 S の中心 C の座標は、

$$(0, 0, 2)$$

となり、半径は、

$$2$$

となる。

(答) $C:(0, 0, 2)$, 半径: 2

[2]

二点 A, C はともに平面 $x=0$ にあるから、直線 AC も平面 $x=0$ に存在していて、

$$y = \frac{1-0}{4-2}(z-2) = \frac{1}{2}z-1$$

を満たす。よってこの直線と xy 平面との交点の y 座標は、

$$y = \frac{1}{2} \cdot 0 - 1 = -1$$

となるから、求める座標は $(0, -1, 0)$ である。

(答) $(0, -1, 0)$

[3]

直線 AB の方程式は、

$$\begin{aligned}\frac{x-0}{0-4} &= \frac{y-1}{1-(-1)} = \frac{z-4}{4-0} \\ \Leftrightarrow -x &= 2y-2 = z-4\end{aligned}$$

となる。よって球面 S の方程式から x, z を消去すると、

$$\begin{aligned}(2y-2)^2 + y^2 + (2y)^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow 9y^2 - 8y &= 0 \\ \Leftrightarrow y(9y-8) &= 0 \\ \therefore y &= 0, \frac{8}{9}\end{aligned}$$

となるから、求める交点の座標は、

$$(2, 0, 2), \left(\frac{2}{9}, \frac{8}{9}, \frac{34}{9}\right)$$

となる。

(答) $(2, 0, 2), \left(\frac{2}{9}, \frac{8}{9}, \frac{34}{9}\right)$

[4]

Q は xy 平面上にあるから、実数 p, q を用いて $Q(p, q, 0)$ と表すことができる。ここで直線 AQ 上の点を R とすると、実数 s を用いて、

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AQ} = (0, 1, 4) + s(p, q-1, -4)$$

となるから、

$$\overrightarrow{CR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OC} = (0, 1, 2) + s(p, q-1, -4)$$

となる。直線 AQ と球面 S が共有点を持つとき、球面 S の中心 C と直線 AR の距離が、球の半径 2 以下となる。つまり、 $CR \leq 2$ となるような R が存在するから、

$$\begin{aligned}CR &\leq 2 \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{CR}|^2 &\leq 4 \\ \Leftrightarrow |(0, 1, 2) + s(p, q-1, -4)|^2 &\leq 4 \\ \Leftrightarrow s^2(p^2 + q^2 - 2q + 17) + 2s(q-9) + 5 &\leq 4 \\ \Leftrightarrow (p^2 + q^2 - 2q + 17) \left(s + \frac{q-9}{p^2 + q^2 - 2q + 17} \right) + 1 - \frac{(q-9)^2}{p^2 + q^2 - 2q + 17} &\leq 0\end{aligned}$$

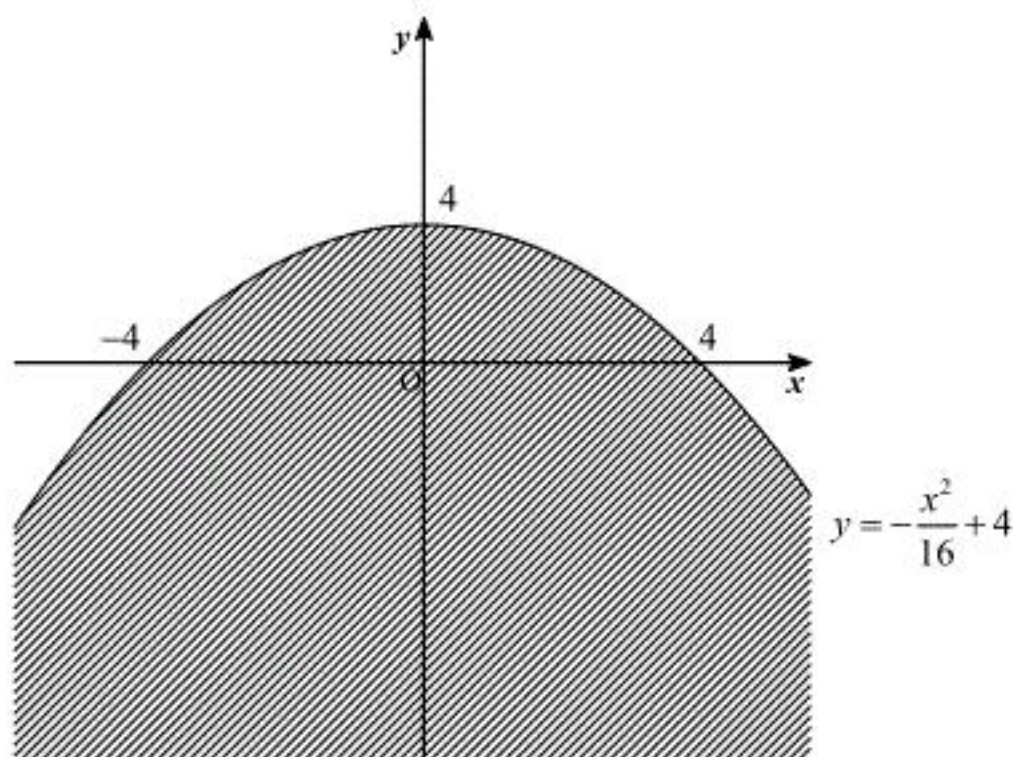
となる。 $p^2 + q^2 - 2q + 17 > 0$ に気を付けると、左辺の最小値は $1 - \frac{(q-9)^2}{p^2 + q^2 - 2q + 17}$ であるから、

$$\begin{aligned}1 - \frac{(q-9)^2}{p^2 + q^2 - 2q + 17} &\leq 0 \\ \Leftrightarrow p^2 + q^2 - 2q + 17 &\leq q^2 - 18q + 81 \\ \Leftrightarrow q &\leq -\frac{p^2}{16} + 4\end{aligned}$$

のとき $CR \leq 2$ となるような点 R が存在し、球面 S と直線 AR は共有点を持つ。よって点 Q は

$$y \leq -\frac{x^2}{16} + 4$$

に存在するから、図示すると下のようになる。ただし境界はすべて含む。



(答) 前図 (境界はすべて含む)