

【解答】

〔1〕	ア	イ	ウ	
	0	1	2	
〔2〕	エ	オ	カ	
	4	5	6	
	キ	ク		
	$\frac{1}{8}$	12		
〔3〕	ケ	コ	サ	シ
	B	A	C	C

【解説】

〔1〕
相異なる自然数 a, b, c は、 $a < b < c$ の関係を満たし、どの2つの数の和も残りの数で割ると1余る。

$a + b$ を c で割ったときの商を次のように求める。 $1 \leq a < b < c$ より、 $a + b < 2c$ なので、 $a + b$ を c で割ったときの商を q とすると、 $q \geq 0$ であり

$$a + b = qc + 1$$

と表せることから

$$qc < qc + 1 (= a + b) < 2c$$

$$\therefore 0 \leq q < 2$$

となる。したがって、 q は0か1のいずれかである。しかし、 q を0とすると、 $a + b = 1$ となり、 $1 \leq a < b$ に反し不適である。よって、求める q は1となる。

次に、 $a + c$ を b で割ったときの商を q' とすると

$$a + c = q'b + 1$$

と表せることから、 $q = 1$ と合わせて

$$\begin{cases} a + b = c + 1 \\ a + c = q'b + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{q' - 1}{2}b + 1 \\ c = \frac{q' + 1}{2}b \end{cases}$$

となるため

$$\begin{aligned} \frac{q' - 1}{2}b + 1 &< b < \frac{q' + 1}{2}b \\ \Rightarrow \frac{q' - 1}{2}b &< b < \frac{q' + 1}{2}b \\ \Leftrightarrow \frac{q' - 1}{2} &< 1 < \frac{q' + 1}{2} \quad (\because b > 0) \\ \Leftrightarrow 1 &< q' < 3 \\ \therefore q' &= 2 \end{aligned}$$

となる。よって、求める q' は2である。

〔2〕

$\triangle ABC$ において、 $\frac{\sin A}{4} = \frac{\sin B}{5} = \frac{\sin C}{6}$ が成り立っているとき、実数 k を用いて

$$\frac{\sin A}{4} = \frac{\sin B}{5} = \frac{\sin C}{6} = k \text{ とおくと}$$

$$\sin A = 4k, \sin B = 5k, \sin C = 6k \quad \cdots \cdots \text{①}$$

となる。ここで、 $\triangle ABC$ の外接円の半径を R とおくと、正弦定理より

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} = 2R \quad \cdots \cdots \text{②}$$

となるから、①、②より

$$\begin{cases} BC = 2R \sin A \\ CA = 2R \sin B \\ AB = 2R \sin C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} BC = 2R \cdot 4k \\ CA = 2R \cdot 5k \\ AB = 2R \cdot 6k \end{cases}$$

が得られる。よって、3辺の長さの比を最も簡単な整数の比で表わすと

$$BC : CA : AB = 4 : 5 : 6$$

となる。また、正の実数 x を用いて $BC = 4x, CA = 5x, AB = 6x$ とおくと、余弦定理より

$$\cos C = \frac{BC^2 + CA^2 - AB^2}{2 \cdot BC \cdot CA} = \frac{(4x)^2 + (5x)^2 - (6x)^2}{2 \cdot 4x \cdot 5x} = \frac{1}{8}$$

となるので、 $\triangle ABC$ の面積は x を用いて

$$S = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CA \cdot \sin C = \frac{1}{2} \cdot 4x \cdot 5x \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^2} = \frac{15\sqrt{7}}{4} x^2$$

と表せるから、この値が $15\sqrt{7}$ と一致するとき

$$x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \quad (> 0)$$

となる。このとき、線分 AB の長さは

$$AB = 6x = 12$$

である。

〔3〕

(a)

不等式 $x^2 + 2x - 8 \geq 0$ を解くと

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 8 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (x + 4)(x - 2) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow x \leq -4, \quad 2 \leq x \end{aligned}$$

となり、ここで

$$x \geq 5 \Rightarrow x \leq -4, \quad 2 \leq x$$

は成立するが、逆は成り立たない。したがって

$$x^2 + 2x - 8 \geq 0 \text{ は、} x \geq 5 \text{ であるための必要条件であるが十分条件ではない}$$

ことがわかる。

(b)

不等式 $|x + 2| \geq |x - 1|$ を解くと

$$\begin{aligned} |x + 2| &\geq |x - 1| \\ \Leftrightarrow (x + 2)^2 &\geq (x - 1)^2 \\ \Leftrightarrow \{(x + 2) - (x - 1)\} \{(x + 2) + (x - 1)\} &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x$$

となる。したがって

$$-\frac{1}{2} \leq x \text{ は、} |x + 2| \geq |x - 1| \text{ であるための必要十分条件である}$$

ことがわかる。

(c)

実数 x, y, z が「 $x + y + z = 0$ かつ $xy + yz + zx = 0$ 」を満たすとき

$$\begin{cases} x + y = -z \\ xy = z^2 \end{cases}$$

となるから、 t についての2次方程式

$$t^2 - (x + y)t + xy = 0 \Leftrightarrow t^2 + zt + z^2 = 0$$

の判別式を D とおくと

$$D \geq 0 \Leftrightarrow (-z)^2 - 4z^2 \geq 0$$

$$\therefore z = 0$$

となり、 $x = y = z = 0$ となる。よって、 $x^3 = y^3 = z^3$ を満たす。逆に、例えば $x = y = z = 1$ のとき、

$x^3 = y^3 = z^3$ を満たすが「 $x + y + z = 0$ かつ $xy + yz + zx = 0$ 」を満たさない。したがって

「 $x + y + z = 0$ かつ $xy + yz + zx = 0$ 」は、 $x^3 = y^3 = z^3$ であるための十分条件であるが

必要条件ではない

ことがわかる。

(d)

自然数 n について2次方程式 $x^2 + x = n$ が整数の解をもつとき、その整数の解を m とすると

$$\begin{aligned} m &= \frac{-1 + \sqrt{1 + 4n}}{2} \text{ または } \frac{-1 - \sqrt{1 + 4n}}{2} \\ \Leftrightarrow \sqrt{1 + 4n} &= 2m + 1 \text{ または } -(2m + 1) \\ \Leftrightarrow 1 + 4n &= (2m + 1)^2 \\ \Leftrightarrow n &= m(m + 1) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $m(m + 1)$ は連続する整数の積であるから、自然数 n は偶数となる。逆に、例

えば $n = 4$ のとき、 n は偶数であるが2次方程式 $x^2 + x = n$ の解は

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

となり、これは整数でない。したがって

2次方程式 $x^2 + x = n$ が整数の解をもつことは、自然数 n が偶数であるための十分

条件であるが必要条件でない

ことがわかるから、対偶をとることによって

自然数 n が奇数であることは、2次方程式 $x^2 + x = n$ が整数の解をもたないための

十分条件であるが必要条件でない

ことがわかる。

【解答】

〔 1 〕	ア	イ	ウ	
	$\frac{1250}{7}$	500	800	
〔 2 〕	エ			
	$\frac{255}{7}$			
〔 3 〕	オ			
	250			
〔 4 〕	カ			
	1	0.5	0.02	0.01
	コ	サ	シ	
	170	25	1050	

【解説】

〔1〕
海草サラダのみで、1食あたりのビタミンAの必要摂取量を摂取するためには、最低 p [g] 食べる必要があるものとする、表1、2より

$$\frac{280}{100} \cdot p \geq 500 \Leftrightarrow p \geq \frac{1250}{7}$$

となる。また、1食あたりのビタミンAとビタミンEの必要摂取量を両方とも摂取するためには、最低 q [g] 食べる必要があるものとする、表1、2より

$$\begin{cases} \frac{280}{100} \cdot q \geq 500 \\ \frac{0.8}{100} \cdot q \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q \geq \frac{1250}{7} \\ q \geq 500 \end{cases}$$

$\therefore q \geq 500$

となり、 $q=500$ のときの金額は $\frac{160}{100} \cdot q = 800$ [円]である。

〔2〕
海草サラダとオレンジジュースを飲食する場合を考える。オレンジジュースを50[g] 飲んで海草サラダを最低 r [g] 食べれば、ポテトサラダを100[g] だけ食べたときと同じかもしくはより多くのビタミンA、ビタミンC、ビタミンEを摂取できるものとする、表1、2より

$$\begin{cases} \frac{20}{100} \cdot 50 + \frac{280}{100} \cdot r \geq \frac{112}{100} \cdot 100 \\ \frac{80}{100} \cdot 50 + \frac{0}{100} \cdot r \geq \frac{40}{100} \cdot 100 \\ \frac{0.4}{100} \cdot 50 + \frac{0.8}{100} \cdot r \geq \frac{0.32}{100} \cdot 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r \geq \frac{255}{7} \\ \text{任意の実数 } r \\ r \geq 15 \end{cases}$$

$\therefore r \geq \frac{255}{7}$

となる。

〔3〕
カレーライス 500[g]に加えてオレンジジュースを飲む場合を考える。摂取カロリーを合計1200[kcal] 以下にするためには、オレンジジュースは最大 s [g] 飲むことができるものとする、表1、2より

$$\frac{150}{100} \cdot 500 + \frac{180}{100} \cdot s \leq 1200 \Leftrightarrow s \leq 250$$

となる。

〔4〕
カレーライス 500[g]に加えてシーザーサラダとオレンジジュースを飲食するとき、ビタミンA、ビタミンC、ビタミンEのすべてについて1食あたりの必要摂取量を満たし、カロリーを合計で1200[kcal] 以下に抑え、かつ、合計金額を最小にする方法を考える。

	ビタミンA (μg /円)	ビタミンC (mg /円)	ビタミンE (mg /円)	カロリー (kcal /円)
シーザーサラダ	1	0.1	0.02	1.5
オレンジジュース	0.5	2	0.01	4.5

シーザーサラダ x (≥ 0) [円] 分、オレンジジュース y (≥ 0) [円] 分を飲食するとき、各種のビタミンをカロリーの摂取量を x, y の不等式で表わすと、表3より

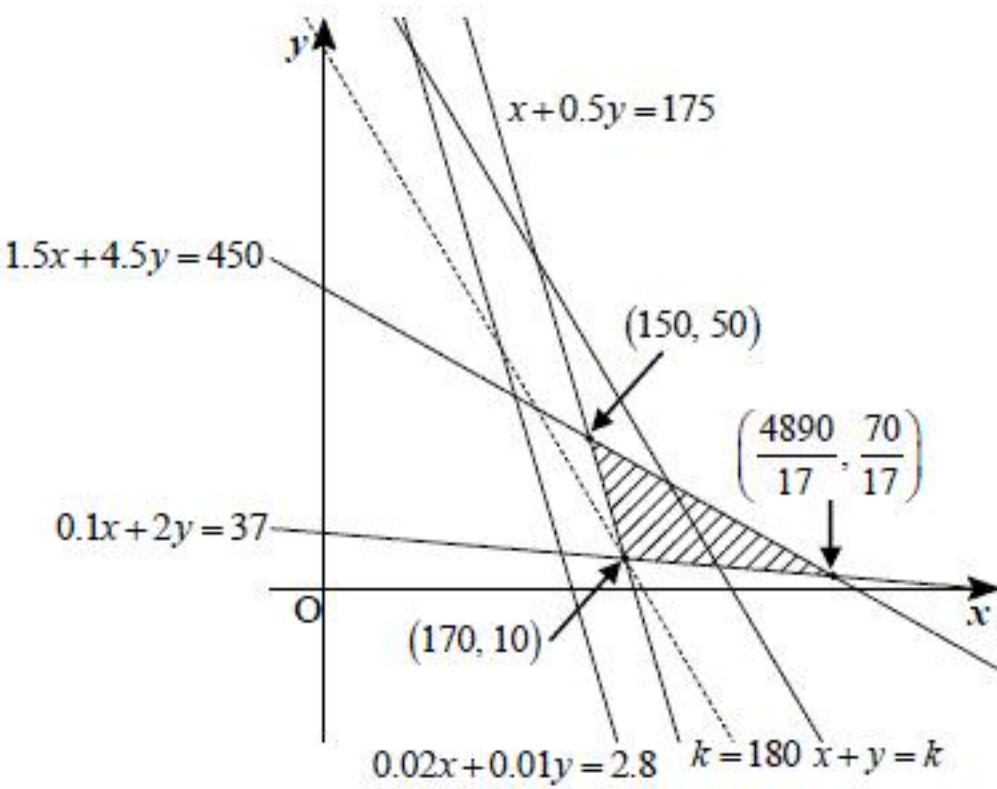
ビタミンAについては、 $x + 0.5y + 65 \times 5 \geq 500$

ビタミンCについては、 $0.1x + 2y + 0.6 \times 5 \geq 40$

ビタミンEについては、 $0.02x + 0.01y + 0.24 \times 5 \geq 4$

カロリーについては、 $1.5x + 4.5y + 150 \times 5 \leq 1200$

となる。これらの不等式を図示すると、以下の図のようになる。ただし境界をすべて含む。



合計金額を k [円] とおくと $k = x + y$ であるから、上図より、合計金額を最小にするのは $(x, y) = (170, 10)$ のとき、つまり、それぞれ

$$\text{シーザーサラダ : } \frac{100}{100} \cdot 170 = 170 \text{ [g]}$$

$$\text{オレンジジュース : } \frac{100}{40} \cdot 10 = 25 \text{ [g]}$$

だけ飲食するときであることがわかる。このとき、摂取されるカロリーは

$$\frac{150}{100} \cdot 500 + \frac{150}{100} \cdot 170 + \frac{180}{100} \cdot 25 = 1050 \text{ [kcal]}$$

である。

III

[1]

点Dは△OABの重心であるから、 $\overrightarrow{OD}$ は

$$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b}) \quad \dots \textcircled{1}$$

と表せる。また、点Eは線分CDを3:1に内分する点であるから、 $\overrightarrow{OE}$ は

$$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OD} \quad \dots \textcircled{2}$$

と表せる。①, ②より、 $\overrightarrow{OE}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表すと

$$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{4}\vec{c} + \frac{3}{4}\left\{\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b})\right\} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

となることがわかる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OE} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

[2]

点Fは△ABCの重心であるから、 $\overrightarrow{OF}$ は

$$\overrightarrow{OF} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \quad \dots \textcircled{3}$$

と表せる。よって、[1]の結果と合わせて、OE:EFは

$$OE:EF = \frac{1}{4} : \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 3:1$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad OE:EF = 3:1$$

[3]

点Tは△PQRの重心であるから、 $\overrightarrow{OT}$ は

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}) = \frac{1}{3}\{(\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{b} + \vec{c}) + (\vec{c} + \vec{a})\} = \frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \quad \dots \textcircled{4}$$

と表せる。また、点Sは $\overrightarrow{RS} = \vec{b}$ を満たすように定めるから、 $\overrightarrow{OS}$ は

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RS} = (\vec{c} + \vec{a}) + \vec{b} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \quad \dots \textcircled{5}$$

と表せる。したがって、③, ④, ⑤より4点O, F, T, Sは一直線上にある。

(証明終)

[4]

$\overrightarrow{FT}$ は③, ④より

$$\overrightarrow{FT} = \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OF} = \frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) - \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

と表せる。ここで、 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 6$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$ であることから、線分FTの長さは

$$FT = |\overrightarrow{FT}| = \frac{1}{3}\sqrt{|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2} = \frac{1}{3}\sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2} = 2\sqrt{3}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad FT = 2\sqrt{3}$$

[5]

平面PQRについて、 $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}$ は

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (\vec{b} + \vec{c}) - (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} - \vec{a}$$

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = (\vec{c} + \vec{a}) - (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} - \vec{b}$$

と表すことができ、それぞれ $\overrightarrow{OS}$ との内積をとると、 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 6$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$ より

$$\overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{PQ} = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = |\vec{c}|^2 - |\vec{a}|^2 = 0$$

$$\overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{PR} = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = |\vec{c}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0$$

となるから、直線OSは平面PQRに垂直であることがわかる。

(証明終)

[6]

直線EP上の任意の点をXとおくと、 $\overrightarrow{OX}$ は実数xを用いて

$$\overrightarrow{OX} = (1-x)\overrightarrow{OP} + x\overrightarrow{OE} = (1-x)(\vec{a} + \vec{b}) + \frac{x}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \left(1 - \frac{3}{4}x\right)\vec{a} + \left(1 - \frac{3}{4}x\right)\vec{b} + \frac{x}{4}\vec{c}$$

と表せるから、 $x = \frac{4}{3}$ のとき辺OCと交わり、その交点をUとすると

$$\overrightarrow{OU} = \frac{1}{3}\vec{c}$$

となる。

(証明終)

また、線分OUの長さは

$$OU = |\overrightarrow{OU}| = \frac{1}{3}|\vec{c}| = 2$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad OU = 2$$