

【解答】

〔1〕	ア	イ	ウ	エ	
	0	−4	$\sqrt{13}$	$10\sqrt{13}$	
〔2〕	オ	カ	キ	ク	ケ
	4	12	11	3	4
	コ	サ	シ	ス	
	4	1	1	2	
〔3〕	セ	ソ	タ	チ	
	$-\frac{a}{2}(x-1)^2$	−1	−2a	$-\frac{1}{2a}$	
	ツ	テ	ト		
	32	−8	$\frac{\sqrt{3}}{2}$		

【解説】

〔1〕

2次方程式 $x^2+3x-1=0$ を解くと、

$$\begin{aligned}x^2+3x-1&=0\\ \therefore x&=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}\end{aligned}$$

となるため、 $\alpha>\beta$ より $\alpha=\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$, $\beta=\frac{-3-\sqrt{13}}{2}$ である。ここで、 $3<\sqrt{13}<4$ であるため、

$$\frac{-3+3}{2}<\frac{-3+\sqrt{13}}{2}<\frac{-3+4}{2}$$

$$\therefore 0<\alpha<1$$

より、 $m<\alpha<m+1$ を満たす整数 m の値は $m=0$ である。同様に、

$$\frac{-3-4}{2}<\frac{-3-\sqrt{13}}{2}<\frac{-3-3}{2}$$

$$\therefore -4<\beta<-3$$

より、 $n<\beta<n+1$ を満たす整数 n の値は $n=-4$ である。また、

$$\begin{aligned}\alpha+\frac{1}{\alpha}&=\frac{\sqrt{13}-3}{2}+\frac{2}{\sqrt{13}-3}\\&=\frac{\sqrt{13}-3}{2}+\frac{2(\sqrt{13}+3)}{(\sqrt{13}-3)(\sqrt{13}+3)}\\&=\frac{\sqrt{13}-3}{2}+\frac{\sqrt{13}+3}{2}\\&=\sqrt{13}\end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned}\alpha^3+\frac{1}{\alpha^3}&=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^3-3\cdot\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}\cdot\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\\&=13\sqrt{13}-3\sqrt{13}\\&=10\sqrt{13}\end{aligned}$$

である。

〔2〕

与えられた条件より、 $n\geq 1$ のとき、

$$T_n=\frac{1}{3}n(4n^2-1)=\frac{1}{3}(4n^3-n)$$

であるため、 $n\geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned}T_{n-1}&=\frac{1}{3}\{4(n-1)^3-(n-1)\}\\&=\frac{1}{3}(4n^3-12n^2+11n-3)\end{aligned}$$

である。ここで、 $T_n=\sum_{k=1}^na_k^2$ であるため、 $n\geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned}a_n^2&=\sum_{k=1}^na_k^2-\sum_{k=1}^{n-1}a_k^2\\&=T_n-T_{n-1}\\&=\frac{1}{3}(4n^3-n)-\frac{1}{3}(4n^3-12n^2+11n-3)\\&=4n^2-4n+1\\&=(2n-1)^2\end{aligned}$$

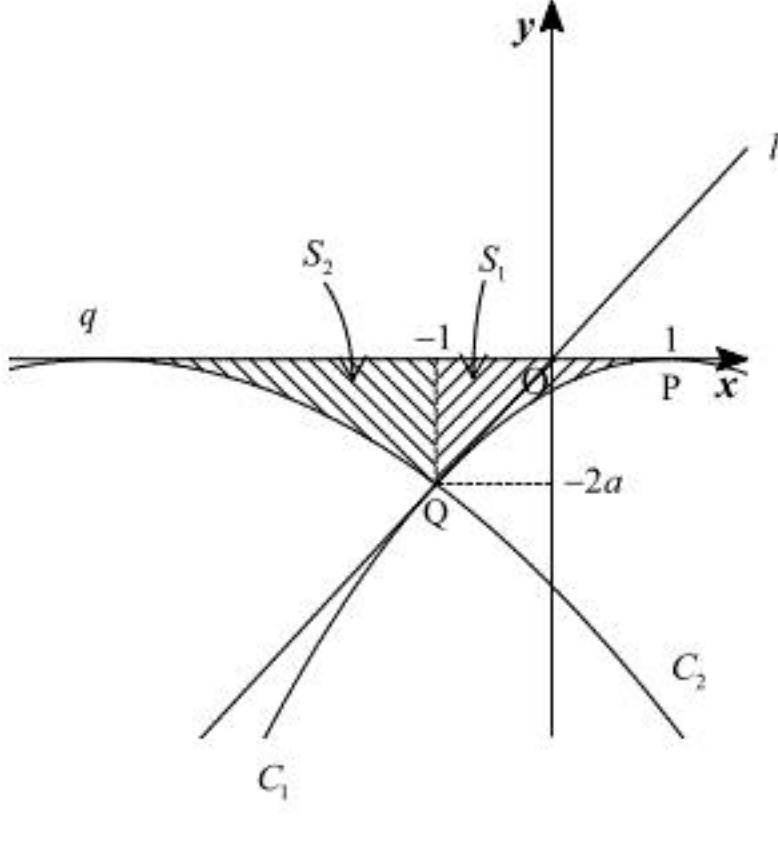
となる。また、 $T_1=\frac{1}{3}\cdot 1\cdot (4\cdot 1^2-1)=1$ であり、 $n=1$ のとき、 $(2n-1)^2=(2\cdot 1-1)^2=1$ であるため、

$n\geq 1$ のとき $a_n^2=(2n-1)^2$ が成り立つ。ここで、 $n\geq 1$ に対し a_n の各項が正であるため、

$$\begin{aligned}a_n&=2n-1\\&=2(n-1)+1\end{aligned}$$

となる。したがって、数列 $\{a_n\}$ は初項1、公差2の等差数列である。

〔3〕



C_1 は点 $(1, 0)$ を頂点とする放物線であるため、 $f(x)=b(x-1)^2$ ($b\neq 0$) とおき、 C_1 の方程式を

$y=f(x)$ とする。このとき、 $f'(x)=2b(x-1)$ であるため、点 Q の座標を $(t, 2at)$ とおくと、

点 Q において l と C_1 が接するため、

$$\begin{aligned}\begin{cases} f(t)=2at \\ f'(t)=2a \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} b(t-1)^2=2at \\ 2b(t-1)=2a \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a(t-1)=2at \\ b(t-1)=a \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a(t+1)=0 \\ b(t-1)=a \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t=-1\ (\because a>0) \\ b(t-1)=a \end{cases} \\ \therefore (b, t)=\left(-\frac{a}{2}, -1\right)\end{aligned}$$

となる。よって、 C_1 の方程式は $y=-\frac{a}{2}(x-1)^2$ であり、点 Q の座標は $(-1, -2a)$ である。次に、

$g(x)=p(x-q)^2$ ($p\neq 0$) とおくと、放物線 C_2 の方程式は $y=g(x)$ である。放物線 C_2 は点 Q を

通り、また、点 Q における C_2 の接線が l と直交するため、 $a>0$ より、点 Q における C_2 の接線

の傾きは $-\frac{1}{2a}$ となる。 $g'(x)=2p(x-q)$ より、

$$\begin{aligned}\begin{cases} g(-1)=-2a \\ g'(-1)=-\frac{1}{2a} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} p(-1-q)^2=-2a \\ 2p(-1-q)=-\frac{1}{2a} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{q+1}{4a}=-2a \\ p(q+1)=\frac{1}{4a} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} q=-8a^2-1 \\ p(q+1)=\frac{1}{4a} \end{cases} \\ \therefore (p, q)=\left(-\frac{1}{32a^3}, -8a^2-1\right)\ (\because a>0)\end{aligned}$$

となる。よって、 C_1 の方程式は $y=-\frac{1}{32a^3}(x+8a^2+1)^2$ である。このとき、 S_1, S_2 をそれぞれ

求めると、

$$\begin{aligned}S_1&=\int_{-1}^1\frac{a}{2}(x-1)^2\,dx\\&=\frac{a}{2}\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_{-1}^1\\&=\frac{4}{3}a\\S_2&=\int_{-8a^2-1}^{-1}\frac{1}{32a^3}(x+8a^2+1)^2\,dx\\&=\frac{1}{32a^3}\left[\frac{1}{3}(x+8a^2+1)^3\right]_{-8a^2-1}^{-1}\\&=\frac{16}{3}a^3\end{aligned}$$

となる。したがって、 $3S_1=S_2$ となるのは、

$$\begin{aligned}3S_1&=S_2\\ \Leftrightarrow 3\cdot\frac{4}{3}a&=\frac{16}{3}a^3\\ \Leftrightarrow a(4a^2-3)&=0\\ \therefore a&=\frac{\sqrt{3}}{2}\ (\because a>0)\end{aligned}$$

のときである。

II

〔解答〕

〔1〕	ア	イ		
	12	7		
〔2〕	ウ	エ	オ	カ
	d	$\frac{18}{19}$	3	9

〔解説〕

選手 k ($k=a, b, c, d, e$) の運動能力, その「強さ」, 選手 e との「傾向」の類似度 S_{ke} をまとめると, 以下の表のようになる。

選手 k	運動能力 $\overrightarrow{p_k}$	「強さ」 $ \overrightarrow{p_k} $	内積 $\overrightarrow{p_k} \cdot \overrightarrow{p_e}$	類似度 S_{ke}
a	$(4, 8, 1)$	$\sqrt{4^2 + 8^2 + 1^2} = 9$	$4 \cdot 6 + 8 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 50$	$\frac{50}{9 \cdot 7} = 0.793 \cdots$
b	$(6, 9, 2)$	$\sqrt{6^2 + 9^2 + 2^2} = 11$	$6 \cdot 6 + 9 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 67$	$\frac{67}{11 \cdot 7} = 0.870 \cdots$
c	$(7, 6, 6)$	$\sqrt{7^2 + 6^2 + 6^2} = 11$	$7 \cdot 6 + 6 \cdot 3 + 6 \cdot 2 = 72$	$\frac{72}{11 \cdot 7} = 0.935 \cdots$
d	$(8, 8, 4)$	$\sqrt{8^2 + 8^2 + 4^2} = 12$	$8 \cdot 6 + 8 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 80$	$\frac{80}{12 \cdot 7} = 0.952 \cdots$
e	$(6, 3, 2)$	$\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2} = 7$		

ただし,

運動能力 $\overrightarrow{p_k} : \overrightarrow{p_k} = (x, y, z)$

「強さ」 $|\overrightarrow{p_k}| : |\overrightarrow{p_k}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

内積 $\overrightarrow{p_k} \cdot \overrightarrow{p_e} : \overrightarrow{p_k} \cdot \overrightarrow{p_e} = 6x + 3y + 2z$

類似度 $S_{ke} : S_{ke} = \cos \theta_{ke} = \frac{\overrightarrow{p_k} \cdot \overrightarrow{p_e}}{|\overrightarrow{p_k}| |\overrightarrow{p_e}|}$

である。

〔1〕

上表より, 5 名の選手の「強さ」の最大値は 12 であり, 最小値は 7 であることがわかる。

〔2〕

上表より, 選手 k と選手 e の類似度 S_{ke} が $S_{ke} \geq 0.95$ を満たすのは, $k=d$ であるため, 選手 e と「傾向」が一致しているのは選手 d である。次に, $\overrightarrow{p_f} = (2, 5, 3), \overrightarrow{p_g} = (x_g, 6, 6)$ であるため, 選手 f と選手 g の「傾向」の類似度 S_{fg} の 2 乗は

$$\begin{aligned} S_{fg}^2 &= \frac{(\overrightarrow{p_f} \cdot \overrightarrow{p_g})^2}{|\overrightarrow{p_f}|^2 |\overrightarrow{p_g}|^2} \\ &= \frac{(2 \cdot x_g + 5 \cdot 6 + 3 \cdot 6)^2}{(2^2 + 5^2 + 3^2) \cdot (x_g^2 + 6^2 + 6^2)} \\ &= \frac{2}{19} \cdot \frac{(x_g + 24)^2}{x_g^2 + 72} \end{aligned}$$

となる。ここで, 関数 $h(t) = \frac{(t+24)^2}{t^2+72}$ ($t > 0$) の最大値を求めることを考える。 $h(t)$ は

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{(t+24)^2}{t^2+72} \\ &= \frac{t^2+48t+576}{t^2+72} \\ &= 1 + \frac{48t+504}{t^2+72} \\ &= 1 + \frac{96(2t+21)}{4t^2+288} \\ &= 1 + \frac{96(2t+21)}{(2t+21)^2 - 42(2t+21) + 729} \\ &= 1 + \frac{96}{(2t+21) + \frac{729}{2t+21} - 42} \end{aligned}$$

と変形できる。 $t > 0$ より $2t+21 > 0, \frac{729}{2t+21} > 0$ であるため, 相加・相乗平均の関係より,

$$\begin{aligned} (2t+21) + \frac{729}{2t+21} &\geq 2\sqrt{(2t+21) \cdot \frac{729}{2t+21}} = 54 \\ \Leftrightarrow h(t) &\leq 1 + \frac{96}{54-42} = 9 \end{aligned}$$

が成り立つ。等号成立は

$$\begin{aligned} 2t+21 &= \frac{729}{2t+21} \\ \Leftrightarrow (2t+21)^2 &= 729 \\ \Leftrightarrow 2t+21 &= 27 \ (\because 2t+21 > 0) \\ \Leftrightarrow t &= 3 \end{aligned}$$

のときであり, これは $t > 0$ を満たす。よって, 関数 $h(t)$ は $t=3$ のとき最大値 9 をとる。した

がって, S_{fg}^2 は $x_g=3$ のとき最大値 $\frac{18}{19}$ をとる。このとき, $\overrightarrow{p_g} = (3, 6, 6)$ であるため,

$$|\overrightarrow{p_g}| = \sqrt{3^2 + 6^2 + 6^2} = 9$$

である。

Ⅲ

[1]

2回目の試行でBが勝つためには、2または3の目が2回連続で出ればよい。よって、求める確率は、

$$\left(\frac{2}{6}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

となる。

(答) $\frac{1}{9}$

[2]

4回目の試行でBが勝つためには、2回目の試行が終わったときにAとBまたはBとCが1点ずつ持っていて、その後2または3の目が2回連続で出ればよい。よって、求める確率は、

$$\left({}_2C_1 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} + {}_2C_1 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6}\right) \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2 = \frac{4}{81}$$

となる。

(答) $\frac{4}{81}$

[3]

5回目の試行でBが勝つとき、最終的な得点はAとCが1点ずつ、Bが3点となる。よって、4回目の試行が終わったときにAとCが1点ずつ、Bが2点持っていて、その後2または3の目が出ればよい。4回目の試行が終わったときにAとCが1点ずつ、Bが2点持っている場合の数はA, B, B, Cを1列に並べる順列から、最初に2回連続でBが得点するBBAC, BBACの2通りを除いたものであるため、

$$\frac{4!}{2!1!1!} - 2 = 10 \text{ (通り)}$$

である。よって、求める確率は、

$$10 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2 \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{5}{162}$$

となる。

(答) $\frac{5}{162}$

[4]

6回目の試行でBが勝つとき、最終的な得点はAまたはCのどちらかが2点、もう一方が0点、Bが4点となる。よって、考えられる点の取り方は、AとBのみが得点する場合はABABBB, ABBABB, BAABBB, BABABBの4通りとなる。よって、求める確率は、

$$4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{2}{6}\right)^4 + 4 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^2 = \frac{10}{729}$$

となる。

(答) $\frac{10}{729}$