

【解答】

ア	780	イ	492	ウ	13
エ	30	オ	0	カ	1
キ	1	ク	$-x-1$	ケ	x
コ	②	サ	②	シ	④

【解説】

〔1〕

(a) 3つの正の数 a, b, c の平均を p とおく。このとき、条件より

$$\text{平均：}p=\frac{a+b+c}{3}=14\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{1}$$

$$\text{標準偏差：}\sqrt{\frac{(a-p)^2+(b-p)^2+(c-p)^2}{3}}=8\qquad\cdots\cdots\textcircled{2}$$

となる。①より、

$$a+b+c=42$$

を得るから、これと②より、

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{(a-p)^2+(b-p)^2+(c-p)^2}{3}} &=8 \\ \Leftrightarrow (a-p)^2+(b-p)^2+(c-p)^2 &=3\cdot 8^2 \\ \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-2(a+b+c)p+3p^2 &=3\cdot 8^2 \\ \therefore a^2+b^2+c^2 &=3\cdot 8^2+2(a+b+c)p-3p^2=780\end{aligned}$$

を得る。また、これより

$$ab+bc+ca=\frac{1}{2}\left\{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\right\}=\frac{1}{2}(42^2-780)=492$$

と求めることができる。

(b)

Aのグループを構成するデータを $x_i(1\leqq i\leqq n=20)$ 、平均を $\bar{x}$ 、分散を σ_x^2 とし、Bのグループを構成するデータを $y_j(1\leqq j\leqq m=60)$ 、平均を $\bar{y}$ 、分散を σ_y^2 とする。また、この集団全体の平均を $\bar{z}$ 、分散を σ_z^2 とすると、それぞれ以下のように表せる。

$$\begin{aligned}\bar{x}&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^nx_i,\bar{y}=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^my_j \\ \bar{z}&=\frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^nx_i+\sum_{j=1}^my_j\right) \\ &=\frac{1}{n+m}(n\bar{x}+m\bar{y}) \\ \sigma_x^2&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})^2,\sigma_y^2=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^m(y_j-\bar{y})^2 \\ \sigma_z^2&=\frac{1}{n+m}\left\{\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{z})^2+\sum_{j=1}^m(y_j-\bar{z})^2\right\} \\ &=\frac{1}{n+m}\left[\sum_{i=1}^n\left\{(x_i-\bar{x})+(\bar{x}-\bar{z})\right\}^2+\sum_{j=1}^m\left\{(y_j-\bar{y})+(\bar{y}-\bar{z})\right\}^2\right] \\ &=\frac{1}{n+m}\left\{\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})^2+2(\bar{x}-\bar{z})\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})+n(\bar{x}-\bar{z})^2\right\} \\ &\quad +\frac{1}{n+m}\left\{\sum_{j=1}^m(y_j-\bar{y})^2+2(\bar{y}-\bar{z})\sum_{j=1}^m(y_j-\bar{y})+m(\bar{y}-\bar{z})^2\right\} \\ &=\frac{1}{n+m}\left\{(n\sigma_x^2+m\sigma_y^2)+n(\bar{x}-\bar{z})^2+m(\bar{y}-\bar{z})^2\right\}\left(\because\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})=\sum_{j=1}^m(y_j-\bar{y})=0\right)\end{aligned}$$

与えられたデータより、 $n=20, m=60, \bar{x}=16, \bar{y}=12, \sigma_x^2=24, \sigma_y^2=28$ であるから、これらを代入することで、

$$\begin{aligned}\bar{z}&=\frac{1}{20+60}(20\cdot 16+60\cdot 12)=13 \\ \sigma_z^2&=\frac{1}{20+60}\left\{(20\cdot 24+60\cdot 28)+20\cdot (16-13)^2+60\cdot (12-13)^2\right\}=30\end{aligned}$$

と求めることができる。

〔2〕

$$x=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\text{とするとき、}$$

$$x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}i}{2}$$

であるから、 $x^2+x+1=0$ の値は

$$\begin{aligned}x^2+x+1&=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} \\ &=\left(\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)^2+\frac{3}{4} \\ &=0\end{aligned}$$

と求めることができる。また、 x^3 の値は

$$\begin{aligned}x^3&=(x-1)(x^2+x+1)+1 \\ &=1\end{aligned}$$

と求めることができる。次に、3以上の自然数 n について、整式 x^{2n} を x^2+x+1 で割ったときの商を $Q_n(x)$ 、余りを a_nx+b_n とおき、 a_n, b_n を求めることを考える。このとき、

$$x^{2n}=(x^2+x+1)Q_n(x)+a_nx+b_n\qquad\cdots\cdots\textcircled{1}$$

と表すことができ、 $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とおくと、上の議論より

$$\begin{cases}\omega^2+\omega+1=0 \\ \omega^3=1\end{cases}\qquad\cdots\cdots\textcircled{2}$$

が成り立つ。また、 ω が2次方程式 $x^2+x+1=0$ の解であることより、 ω の共役複素数 $\overline{\omega}$ もこの2次方程式の解であるから、

$$\begin{cases}\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0 \\ \overline{\omega}^3=(\overline{\omega-1})\left(\overline{\omega^2+\overline{\omega}+1}\right)+1=1\end{cases}\qquad\cdots\cdots\textcircled{3}$$

も成り立つ。①に $x=\omega, \overline{\omega}$ を代入すると、②、③より

$$\begin{cases}\omega^{2n}=a_n\omega+b_n \\ \overline{\omega}^{2n}=a_n\overline{\omega}+b_n \\ \therefore\begin{cases}a_n=\frac{\omega^{2n}-\overline{\omega}^{2n}}{\omega-\overline{\omega}} \\ b_n=\frac{\overline{\omega}^{2n}-\omega\omega^{2n}}{\omega-\overline{\omega}}\end{cases}\left(\because\omega-\overline{\omega}\neq 0\right)\cdots\cdots\textcircled{4}\end{cases}$$

となる。以下、 n を3で割った余りで場合分けして考える。

[1] $n=3k$ のとき

④より、 a_n, b_n の値は

$$\begin{aligned}a_{3k}&=\frac{\omega^{6k}-\overline{\omega}^{6k}}{\omega-\overline{\omega}}=\frac{1^2-1^2}{\omega-\overline{\omega}}=0 \\ b_{3k}&=\frac{\overline{\omega\omega}^{6k}-\overline{\omega\omega}^{6k}}{\omega-\overline{\omega}}=\frac{\omega-\overline{\omega}}{\omega-\overline{\omega}}=1\end{aligned}$$

と求まる。よって、求める余りは1である。

[2] $n=3k+1$ のとき

④より、 a_n, b_n の値は

$$\begin{aligned}a_{3k+1}&=\frac{\omega^{6k+2}-\overline{\omega}^{6k+2}}{\omega-\overline{\omega}}=\frac{\omega^2-\overline{\omega}^2}{\omega-\overline{\omega}}=\omega+\overline{\omega}=-1 \\ b_{3k+1}&=\frac{\overline{\omega\omega}^{6k+2}-\overline{\omega\omega}^{6k+2}}{\omega-\overline{\omega}}=\frac{\omega\overline{\omega}^2-\overline{\omega\omega}^2}{\omega-\overline{\omega}}=\frac{\overline{\omega}-\omega}{\omega-\overline{\omega}}=-1\left(\because\omega\overline{\omega}=\overline{\omega\omega}=1\right)\end{aligned}$$

と求まる。よって、求める余りは $-x-1$ である。

[3] $n=3k+2$ のとき

④より、 a_n, b_n の値は

$$\begin{aligned}a_{3k+2}&=\frac{\omega^{6k+4}-\overline{\omega}^{6k+4}}{\omega-\overline{\omega}}=\frac{\omega-\overline{\omega}}{\omega-\overline{\omega}}=1 \\ b_{3k+2}&=\frac{\overline{\omega\omega}^{6k+4}-\overline{\omega\omega}^{6k+4}}{\omega-\overline{\omega}}=\frac{\omega\overline{\omega}-\overline{\omega\omega}}{\omega-\overline{\omega}}=0\left(\because\omega\overline{\omega}=\overline{\omega\omega}=1\right)\end{aligned}$$

と求まる。よって、求める余りは x である。

以上[1], [2], [3]より、整式 x^{2n} を x^2+x+1 で割った余りは

$$\begin{cases}n=3k\text{のとき、}1 \\ n=3k+1\text{のとき、}-x-1 \\ n=3k+2\text{のとき、}x\end{cases}$$

となる。

〔3〕

$\triangle ABC$ において、線分の長さを $AB=c, BC=a, CA=b$ とおく。

(a)

$p=0$ のとき、 $\overline{AB}\cdot\overline{BC}=0$ より $AB\perp BC$ であるから、 $\triangle ABC$ は角Bが直角となる三角形であることがわかる。

(b)

$\triangle ABC$ において、余弦定理を用いることにより

$$\cos\angle B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},\cos\angle A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

となるから、ベクトルの内積 $\overline{AB}\cdot\overline{BC}, \overline{CA}\cdot\overline{AB}$ の値は

$$\begin{aligned}\overline{AB}\cdot\overline{BC}&=-\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cos\angle B=-c\cdot a\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=-\frac{c^2+a^2-b^2}{2} \\ \overline{CA}\cdot\overline{AB}&=-\overline{CA}\cdot\overline{AB}\cos\angle A=-b\cdot c\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\frac{b^2+c^2-a^2}{2}\end{aligned}$$

と表せる。したがって、 $p=q$ のとき

$$\begin{aligned}p&=q \\ \Leftrightarrow-\frac{c^2+a^2-b^2}{2}&=-\frac{b^2+c^2-a^2}{2} \\ \Leftrightarrow(a+b)(a-b)&=0 \\ \therefore a&=b\left(\because a, b>0\right)\end{aligned}$$

が成り立つから、 $\triangle ABC$ は $BC=CA$ となる三角形であることがわかる。

(c)

(b)と同様に考えれば、 a, b, c, p, q, r は関係式

$$\begin{cases}p=-\frac{c^2+a^2-b^2}{2} \\ q=-\frac{b^2+c^2-a^2}{2} \\ r=-\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=-(r+p) \\ b^2=-(q+r) \\ c^2=-(p+q)\end{cases}$$

を満たす。よって、 $\triangle ABC$ の面積は、 p, q, r を用いて表すと

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\overline{AB}|^2|\overline{AC}|^2-(\overline{AB}\cdot\overline{AC})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{c^2b^2-q^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(p+q)(q+r)-q^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{pq+qr+rp}$$

となる。

【解答】

ア	7	イ	6	ウ	13
エ	6	オ	3	カ	$\frac{t^2}{4x_A}$
キ	$\frac{t^2}{4}$	ク	28	ケ	$28-t$
コ	14	サ	7	シ	7

【解説】

ビー玉は合計10個、おはじきは合計18個であるから、

$$\begin{cases} x_A + x_B = 10 \\ y_A + y_B = 18 \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。ここで、 $(x_A, y_A) = (3, 12)$ である場合、①式より、

$$(x_B, y_B) = (7, 6)$$

となる。またBさんが得られる満足度 u_B は

$$\begin{aligned} u_B &= x_B + y_B \\ &= 13 \end{aligned}$$

となる。次に、この状態でAさんがBさんからビー玉を3個受け取り、同時にBさんにおはじきを k 個渡すときにAさんの満足度の値が $u_A = 12$ となるとする。このとき、

$$\begin{aligned} (x_A, y_A) &= (3+3, 12-k) \\ &= (6, 12-k) \end{aligned}$$

となるから、 k の値は

$$\begin{aligned} u_A &= 12 \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{x_A y_A} &= 12 \\ \Leftrightarrow 6(12-k) &= 6^2 \\ \Leftrightarrow 12-k &= 6 \\ \therefore k &= 6 \end{aligned}$$

と求まる。またこの交換によって、

$$\begin{aligned} (x_B, y_B) &= (7-3, 6+6) \\ &= (4, 12) \end{aligned}$$

となるから、満足度 u_B は $u_B = 16$ となり、交換前より3だけ高くなる。また、0以上の実数 t を用いて、満足度が $u_A = t$ となるようにAさんがビー玉とおはじきを保有するとき、 x_A, y_A, t の間に

$$\begin{aligned} u_A &= t \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{x_A y_A} &= t \\ \Leftrightarrow 4x_A y_A &= t^2 \quad (\because t \geq 0) \\ \Leftrightarrow y_A &= \frac{t^2}{4x_A} \quad (\because x_A > 0) \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

という関係が成り立つ。①、②より

$$\begin{aligned} (x_B, y_B) &= (10-x_A, 18-y_A) \\ &= \left(10-x_A, 18-\frac{t^2}{4x_A} \right) \end{aligned}$$

と表されるから、Bさんの満足度 u_B は x_A, t を用いて

$$\begin{aligned} u_B &= x_B + y_B \\ &= -x_A - \frac{t^2}{4} \cdot \frac{1}{x_A} + 28 \end{aligned}$$

と表すことができる。ここで、 $x_A > 0$ 、 $\frac{t^2}{4} \geq 0$ より相加・相乗平均の関係を用いて、

$$\begin{aligned} x_A + \frac{t^2}{4} \cdot \frac{1}{x_A} &\geq 2\sqrt{x_A \cdot \frac{t^2}{4} \cdot \frac{1}{x_A}} = t \\ \therefore -x_A - \frac{t^2}{4} \cdot \frac{1}{x_A} &\leq -t \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

が成り立つことが分かる。また、③の等号成立は

$$\begin{aligned} x_A &= \frac{t^2}{4} \cdot \frac{1}{x_A} \\ \therefore x_A &= \frac{t}{2} \quad (\because x_A > 0, \frac{t^2}{4} \geq 0) \end{aligned}$$

となるときである。③式より、

$$u_B = -x_A - \frac{t^2}{4} \cdot \frac{1}{x_A} + 28 \leq 28-t$$

となるから、Bさんの満足度 u_B の最大値は t を用いて

$$28-t$$

と表すことができる。ここで、 $u_A = t$ と一定のとき、家全体の満足度 $w = u_A u_B$ が最大値をとる

のは、Bさんの満足度 u_B が最大値をとるとき、すなわち③の等号が成立する $x_A = \frac{t}{2}$ のときで

ある。このとき、 w は t を用いて

$$\begin{aligned} w &= u_A u_B \\ &= t(28-t) \\ &= -(t-14)^2 + 196 \end{aligned}$$

と表せる。これより、 t の値を変化させたとき、 w が最大値をとるのは、 $t = u_A = 14$ のときである。またこのとき、 x_A の値は

$$\begin{aligned} x_A &= \frac{t}{2} \\ \therefore x_A &= 7 \end{aligned}$$

と求まり、 y_A の値は

$$\begin{aligned} y_A &= \frac{t^2}{4x_A} \\ &= \frac{14^2}{4 \cdot 7} \\ &= 7 \end{aligned}$$

と求まる。以上より、 $(x_A, y_A) = (7, 7)$ のとき、 w は最大値をとる。

[1]

$k \geq 1$ のとき、第1群から第 k 群までに含まれる数の個数は

$$\sum_{l=1}^k 2l = 2 \cdot \frac{1}{2} k(k+1) = k(k+1) \text{ 個}$$

である。よって、第1群から第3群までに含まれる数の個数は $3 \cdot 4 = 12$ 個であるから、第4群の5番目の数は全体の $12 + 5 = 17$ 番目である。ここで、全体の数列は初項1、公比2の等比数列であるから、全体の17番目の数は

$$1 \cdot 2^{17-1} = 2^{16} = 65536$$

である。

(答) 65536

[2]

[1] の過程より、第1群から第3群までに含まれる数の個数は12個であり、全体の数列の m 番目の数は 2^{m-1} であるから、第1群から第3群までに含まれる数の総和は

$$\sum_{m=1}^{12} 2^{m-1} = \frac{2^{12}-1}{2-1} = 4095$$

である。

(答) 4095

[3]

[1] の過程より、 $k \geq 2$ のとき、第1群から第 $(k-1)$ 群までに含まれる数の個数は $k(k-1)$ 個である。よって、 $k \geq 2$ のとき、第 k 群の最初の数は全体の数列の $\{k(k-1)+1\}$ 番目の数であるから、求める数は

$$2^{k(k-1)+1-1} = 2^{k(k-1)}$$

であり、これは $k=1$ のときにも成り立つ。

(答) $2^{k(k-1)}$

[4]

[1] の過程より、第1群から第 k 群までに含まれる数の個数は $k(k+1)$ 個であるから、それらの総和は

$$\sum_{m=1}^{k(k+1)} 2^{m-1} = \frac{2^{k(k+1)}-1}{2-1} = 2^{k(k+1)}-1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。一方、 $k \geq 2$ のとき、第1群から第 $(k-1)$ 群までに含まれる数の個数は $k(k-1)$ 個であるから、それらの総和は

$$\sum_{m=1}^{k(k-1)} 2^{m-1} = 2^{k(k-1)}-1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

である。 $k \geq 2$ のとき、第 k 群に含まれる数の総和は①と②の差に等しいから、求める総和は

$$\{2^{k(k+1)}-1\}-\{2^{k(k-1)}-1\} = 2^{k(k-1)}(2^{2k}-1)$$

であり、これは $k=1$ のときにも成り立つ。

(答) $2^{k(k-1)}(2^{2k}-1)$