

【解答】

ア	イ	ウ	エ	オ
$-\sqrt{4-a^2}$	$\sqrt{4-a^2}$	$\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}$	$\frac{a}{2}$	$-\frac{\sqrt{4-a^2}}{a}$
カ	キ	ク	ケ	コ
$\frac{2}{a}$	$-\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{\sqrt{4-a^2}}{a}$	$\frac{2}{a}$
サ		シ	ス	セ
$-\sqrt{4-a^2} < t < \sqrt{4-a^2}$		4	1	$a-1$

【解説】

円 $x^2 + y^2 = 1$ と円 $(x-t)^2 + (y-a)^2 = 1$ が共有点を持つ条件は、中心間の距離が2つの円の半径の差以上、和以下になることであるから、

$$1-1 \leq \sqrt{t^2+a^2} \leq 1+1$$

$$\therefore t^2 \leq 4-a^2$$

となる。 $1 < a < 2$ より、 $4-a^2 > 0$ であるから、

$$-\sqrt{4-a^2} \leq t \leq \sqrt{4-a^2} \quad \dots \textcircled{1}$$

を得る。

2つの円の半径は等しいため、共有点が1点のみになるのは、2つの円が外接している時のみである。このとき、

$$\sqrt{t^2+a^2} = 2$$

$$\Leftrightarrow t = \pm\sqrt{4-a^2} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。2つの円の半径は等しいため、共有点の座標は中心を結ぶ線分の中点 $\left(\frac{t}{2}, \frac{a}{2}\right)$ である。

また、共通接線は点 $\left(\frac{t}{2}, \frac{a}{2}\right)$ での円 $x^2 + y^2 = 1$ の接線であるから、その方程式は、

$$\frac{t}{2}x + \frac{a}{2}y = 1$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{t}{a}x + \frac{2}{a} \quad (\because a \neq 0)$$

である。まとめると、共有点の座標と接線の方程式の組は、

$$\left(\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}, \frac{a}{2}\right) \text{ と } y = -\frac{\sqrt{4-a^2}}{a}x + \frac{2}{a}$$

であるか、

$$\left(-\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}, \frac{a}{2}\right) \text{ と } y = \frac{\sqrt{4-a^2}}{a}x + \frac{2}{a}$$

である。

また、2つの円が異なる2つの交点を持つとき、①から②の場合を除いて、 t は

$$-\sqrt{4-a^2} < t < \sqrt{4-a^2} \quad \dots \textcircled{3}$$

の範囲を動く。このとき、共有点の座標は、

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & \dots \textcircled{4} \\ (x-t)^2 + (y-a)^2 = 1 & \dots \textcircled{5} \end{cases}$$

を満たす。④から⑤を引くと、

$$2tx - t^2 + 2ay - a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2t}(2ay - t^2 - a^2) \quad (\because t \neq 0)$$

であり、これを④に代入すれば、

$$\frac{1}{4t^2}(2ay - t^2 - a^2)^2 + y^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{t^2+a^2}{t^2}y^2 - \frac{t^2+a^2}{t^2}ay + \frac{(t^2+a^2)^2}{4t^2} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 - ay + \frac{t^2+a^2}{4} - \frac{t^2}{t^2+a^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \left\{ a \pm \sqrt{a^2 - 4 \left(\frac{t^2+a^2}{4} - \frac{t^2}{t^2+a^2} \right)} \right\}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{a}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4t^2}{a^2+t^2} - t^2}$$

を得る。よって、

$$y_1 = \frac{a}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4t^2}{a^2+t^2} - t^2}$$

$$y_2 = \frac{a}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4t^2}{a^2+t^2} - t^2}$$

である。ここで、

$$\frac{4t^2}{a^2+t^2} - t^2 = \left(4 - \frac{4a^2}{a^2+t^2} \right) - t^2$$

$$= (4+a^2) - \left(\frac{4a^2}{a^2+t^2} + a^2 + t^2 \right)$$

であり、 $\frac{4a^2}{a^2+t^2} \geq 0$ 、 $a^2+t^2 \geq 0$ より、相加相乗平均の不等式から、

$$\frac{4a^2}{a^2+t^2} + a^2 + t^2 \geq 2\sqrt{\frac{4a^2}{a^2+t^2}(a^2+t^2)}$$

$$\therefore \frac{4a^2}{a^2+t^2} + a^2 + t^2 \geq 4a$$

が成り立つ。よって、

$$\frac{4t^2}{a^2+t^2} - t^2 \leq 4 - 4a + a^2$$

を得る。ただし、等号成立は

$$\frac{4a^2}{a^2+t^2} = a^2 + t^2$$

$$\Leftrightarrow (a^2+t^2)^2 = 4a^2$$

$$\Leftrightarrow a^2+t^2 = 2a \quad (\because a^2+t^2 \geq 0, 2a > 0)$$

のときである。ここで、 $0 < a < 2$ のとき、

$$0 < a < 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a(a-2) < 0 \\ 2a < 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 0 < 2a - a^2 < 4 - a^2$$

$$\therefore 0 < \sqrt{2a - a^2} < \sqrt{4 - a^2}$$

となるから、

$$t = \pm\sqrt{2a - a^2}$$

であり、これは③を満たす。よって、 $\frac{4t^2}{a^2+t^2} - t^2$ の最大値は $4 - 4a + a^2$ であり、 y_2 の最小値は、

$$\frac{a}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{4 - 4a + a^2} = \frac{a}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(a-2)^2}$$

$$= \frac{a}{2} - \frac{2-a}{2} \quad (\because 1 < a < 2)$$

$$= a - 1$$

である。

II

〔解答〕

	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ
[1]	$\frac{4}{e^2}b$	2	4b	4b	-4b	1	0	$4\left(1-\frac{1}{e^2}\right)b$	$\frac{8}{3}b$
	ネ	ノ	ハ	ヒ	フ				
[2]	$\frac{4}{e^2}d$	4d	2	0	1				

〔解説〕

[1]

$f(x) = ae^x$, $g(x) = bx^2$ とおく。また, C_1 と C_2 が共通の接線を持つ共有点の x 座標を k とおく。

このとき,

$$\begin{cases} f(k) = g(k) \\ f'(k) = g'(k) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ae^k = bk^2 \\ ae^k = 2bk \end{cases} \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。よって,

$$\begin{aligned} bk^2 &= 2bk \\ \Leftrightarrow bk(k-2) &= 0 \\ \Leftrightarrow k &= 0, 2 \quad (\because b \neq 0) \end{aligned}$$

となる。 $k=0$ とすると, $\textcircled{1}$ より $a=0$ となり, $a>0$ に反する。よって $k=2$ であり, $\textcircled{1}$ より,

$$\begin{aligned} ae^2 &= 4b \\ \Leftrightarrow a &= \frac{4}{e^2}b \end{aligned}$$

を得る。また, このとき接点の座標は,

$$(k, bk^2) = (2, 4b)$$

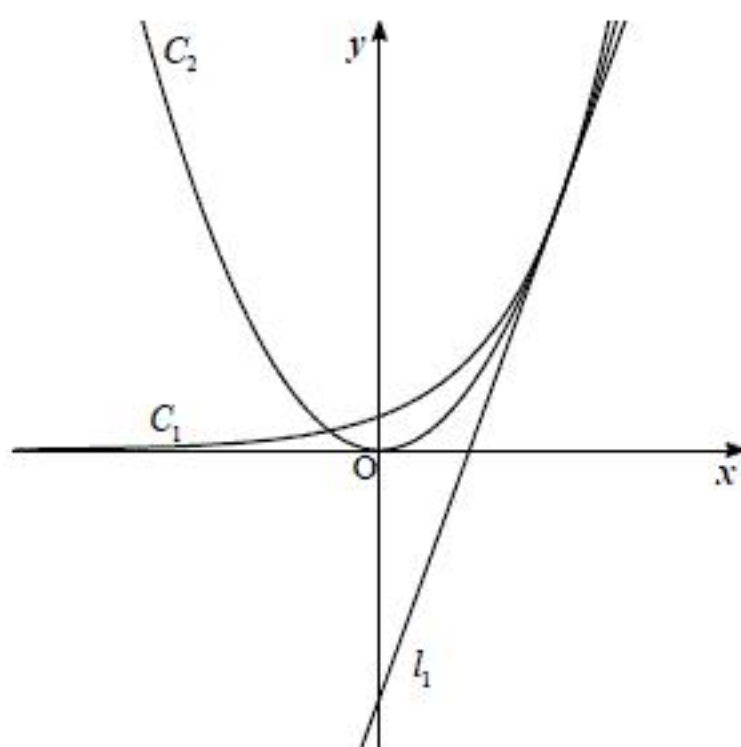
となり, 接線 l_1 の方程式は,

$$\begin{aligned} y - bk^2 &= 2bk(x - k) \\ \Leftrightarrow y &= 4bx + (-4b) \end{aligned}$$

となる。 $l_1: y = 4b(x-1)$ より, l_1 は b の値にかかわらず点 $(1, 0)$ を通る。ここで, 下図より,

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^k (ae^x - 4bx + 4b) dx \\ &= 4b \int_0^k \left(\frac{1}{e^2} e^x - x + 1 \right) dx \\ &= 4b \left[\frac{1}{e^2} e^x - \frac{x^2}{2} + x \right]_0^2 \\ &= 4b \left(1 - 2 + 2 - \frac{1}{e^2} \right) \\ &= 4 \left(1 - \frac{1}{e^2} \right) b \\ S_2 &= \int_0^k (bx^2 - 4bx + 4b) dx \\ &= b \int_0^2 (x-2)^2 dx \\ &= b \left[\frac{(x-2)^3}{3} \right]_0^2 \\ &= \frac{8}{3}b \end{aligned}$$

であるから, $\frac{S_1}{S_2}$ は a, b の値によらず一定である。



[2]

$c > 0$ より $y = \log \frac{x}{c} \Leftrightarrow x = ce^y$ が成り立つから, x, y を入れ替えれば [1] と同じ条件である。

c, d はそれぞれ [1] における a, b に対応するから,

$$c = \frac{4}{e^2}d$$

が成り立つ。また, C_3, C_4 の接点は,

$$(4d, 2)$$

であり, 接線 l_2 は d の値にかかわらず点 $(0, 1)$ を通る。

III

〔解答〕

〔1〕	$\square$	$\square$		
	$\frac{1}{4^n}$	$\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$		
〔2〕	$\square$	$\square$		
	$\frac{2}{n(n+1)}$	$\frac{2n}{n+1}$		
〔3〕	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$
	n	$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$	$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$	$\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1)$

〔解説〕

〔1〕

$$c_n=a_{2^n}=\frac{1}{\left(2^n\right)^2}=\frac{1}{4^n}$$

であり、数列 $\{c_n\}$ の第1項から第 n 項までの和は、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^nc_k&=\sum_{k=1}^n\frac{1}{4^k}\\&=\frac{\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)}{1-\frac{1}{4}}\\&=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)\end{aligned}$$

となる。

〔2〕

$$a_n=\frac{1}{n}より,$$

$$\begin{aligned}b_n&=\sum_{k=1}^n\frac{1}{a_k}\\&=\sum_{k=1}^nk\\&=\frac{n(n+1)}{2}\end{aligned}$$

が成り立つ。よって、

$$c_n=a_{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2}{n(n+1)}$$

であり、数列 $\{c_n\}$ の第1項から第 n 項までの和は、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^nc_k&=\sum_{k=1}^n\frac{2}{k(k+1)}\\&=2\sum_{k=1}^n\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\cdots-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\\&=\frac{2n}{n+1}\end{aligned}$$

となる。

〔3〕

$a_0=\frac{0\cdot1}{2}=0$ と定義すると、数列 $\{a_n\}$ は単調増加な整数列であるから、 $a_{n-1}<m\leq a_n$ のとき、

すなわち、 $a_{n-1}+1\leq m\leq a_n$ のときに $b_m=n$ となる。したがって、 $\frac{n(n+1)}{2}=a_n$ より

$$b_{\frac{n(n+1)}{2}}=b_{a_n}=n$$

であり、

$$b_{\frac{n(n+1)}{2}+1}=b_{a_n+1}=n+1$$

$$\begin{aligned}c_{\frac{n(n+1)}{2}+1}&=a_{b_{\frac{n(n+1)}{2}+1}}\\&=a_{n+1}\\&=\frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$

である。また、数列 $\{b_n\}$ の第1項から第 $\frac{n(n+1)}{2}$ 項までの和は、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{a_n}b_k&=\sum_{k=a_0+1}^{a_1}1+\sum_{k=a_1+1}^{a_2}2+\cdots+\sum_{k=a_{n-1}+1}^{a_n}n\\&=(a_1-a_0)\cdot1+(a_2-a_1)\cdot2+\cdots+(a_n-a_{n-1})\cdot n\\&=\sum_{k=1}^n\left(\frac{k(k+1)}{2}-\frac{(k-1)k}{2}\right)k\\&=\sum_{k=1}^nk^2\\&=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\end{aligned}$$

となる。さらに、数列 $\{c_n\}$ の第1項から第 $\frac{n(n+1)}{2}$ 項までの和は、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{a_n}c_k&=\sum_{k=1}^{a_n}a_{b_k}\\&=\sum_{k=a_0+1}^{a_1}a_1+\sum_{k=a_1+1}^{a_2}a_2+\cdots+\sum_{k=a_{n-1}+1}^{a_n}a_n\\&=(a_1-a_0)\cdot a_1+(a_2-a_1)\cdot a_2+\cdots+(a_n-a_{n-1})\cdot a_n\\&=\sum_{k=1}^n\left(\frac{k(k+1)}{2}-\frac{(k-1)k}{2}\right)\frac{k(k+1)}{2}\\&=\sum_{k=1}^n\left(\frac{1}{2}k^3+\frac{1}{2}k^2\right)\\&=\frac{1}{8}n^2(n+1)^2+\frac{1}{12}n(n+1)(2n+1)\\&=\frac{1}{24}n(n+1)(3n^2+3n+4n+2)\\&=\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1)\end{aligned}$$

となる。

IV

〔解答〕

〔1〕	㉠	㉡		
	$\frac{7}{12}$	$\frac{2}{3}$		
〔2〕	㉢	㉣		
	$\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$	$1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$		
〔3〕	㉤	㉥	㉦	㉧
	$\frac{1}{15}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$	1	$n-1$	$\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}$

〔解説〕

〔1〕

1回目、2回目に出たサイコロの目をそれぞれ X, Y とおく。 $X < Y$ となる確率を p 、 $X = Y$ となる確率を q とおく。 q は2回目に1回目と同じ目が出る確率より、

$$q=\frac{1}{6}$$

である。対称性より $X > Y$ となる確率も p であるから、

$$q+2p=1$$

$$\therefore p=\frac{1}{2}(1-q)=\frac{5}{12}$$

を得る。よって $X \leq Y$ となる確率は、

$$p+q=\frac{7}{12} \qquad \cdots \text{①}$$

である。また、 $X < Y$ かつ Y が X で割り切れるのは、

$$(X, Y)=(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 6), (3, 6)$$

の8通りであるから、この場合の確率は $\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$ である。 $X = Y$ のときは必ず Y が X で割り切れることから、結局、 $X \leq Y$ かつ Y が X で割り切れる場合の確率は、

$$\frac{2}{9}+q=\frac{7}{18} \qquad \cdots \text{②}$$

となる。よって、 $X \leq Y$ の条件の下で Y が X で割り切れる確率は、①、②より、

$$\frac{\left(\frac{7}{18}\right)}{\left(\frac{7}{12}\right)}=\frac{2}{3}$$

である。

〔2〕

n 回目に初めて1の目が出るのは、1回目から $n-1$ 回目まで1以外の目が出続け、 n 回目に1の目が出る場合であるから、

$$\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

の確率である。また、 n 回目までに少なくとも1の目が1回出る事象の余事象は、1以外の目が n 回連続で出る事象である。よって、 n 回目までに少なくとも1回は1の目が出る確率は、

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

となる。

〔3〕

k 回目に1か6のどちらかの目が初めて出て、 n 回目にもう一方の目が出る、といった条件を言い換えると、1回目から $k-1$ 回目までに1, 6以外の目が、 k 回目に1, 6のどちらかの目が出て、さらに $k+1$ 回目から $n-1$ 回目までは1, 6のうちまだ出ていない方以外の目が、 n 回目に1, 6のうちまだ出ていない方の目が出る確率であるから、

$$\left(\frac{4}{6}\right)^{k-1}\cdot\frac{2}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k-1}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{15}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$$

となる。このゲームが n 回目で終わるとき、 k の範囲は、

$$1 \leq k \leq n-1$$

であるため、ゲームが n 回目で終わる確率は、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{1}{15}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}\right\} &= \frac{1}{15}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{15}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}}{1-\frac{4}{5}} \\ &= \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\left\{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\right\} \\ &= \frac{1}{3}\cdot\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\} \end{aligned}$$

となる。