

【解答】

ア	1	イ	3	ウ	2	エ	$\frac{1}{2}$	オ	$\frac{3}{2}$	カ	$\frac{3}{2}$	キ	$(0, 3, 0)$
ク	$x^2 + (y - 6)^2 + z^2 = 9$					ケ	$x^2 + (y - 3)^2 + z^2 = \frac{9}{4}$					コ	$y = \frac{27}{8}$
サ	$\left(0, \frac{27}{8}, 0\right)$					シ	$\frac{3\sqrt{15}}{8}$					ス	$\left(0, \frac{23}{7}, 0\right)$
												セ	$\frac{4\sqrt{5}}{7}$

【解説】

〔1〕

点Qは点A(0, 6, 0)を中心とする半径3の球面 S_1 上を動くから、 $\vec{q}$ はベクトル方程式

$$|\vec{q} - \vec{a}| = 3 \qquad \cdots \text{①}$$

を満たす。また、点Pは線分OQの中点であるから、 $\vec{q}$ は $\vec{p}$ を用いて

$$\vec{q} = 2\vec{p}$$

と表せる。これを①に代入して、整理すると

$$|2\vec{p} - \vec{a}| = 3 \Leftrightarrow \left| \vec{p} - \frac{1}{2}\vec{a} \right| = \frac{3}{2}$$

が得られる。ここで、 $\frac{1}{2}\vec{a} = (0, 3, 0)$ より、点Pは半径 $\frac{3}{2}$ 、中心の座標 $(0, 3, 0)$ の球面上を動くことがわかる。

〔2〕

S_1 は点 $(0, 6, 0)$ を中心とする半径3の球面、 S_2 は点 $(0, 3, 0)$ を中心とする半径 $\frac{3}{2}$ の球面であるから、その方程式はそれぞれ

$$S_1: x^2 + (y - 6)^2 + z^2 = 9 \qquad \cdots \text{②}$$

$$S_2: x^2 + (y - 3)^2 + z^2 = \frac{9}{4} \qquad \cdots \text{③}$$

である。ここで、②－③より

$$(y - 6)^2 - (y - 3)^2 = \frac{27}{4} \Leftrightarrow y = \frac{27}{8}$$

となり、これを②に代入すると

$$x^2 + z^2 = \frac{135}{64}$$

が得られるから、円 C_1 を含む平面の方程式は $y = \frac{27}{8}$ となり、円 C_1 の中心の座標は $\left(0, \frac{27}{8}, 0\right)$ 、

半径は $\sqrt{\frac{135}{64}} \left(= \frac{3\sqrt{15}}{8} \right)$ であることがわかる。

さらに、点U, Vの位置ベクトルをそれぞれ $\vec{u}, \vec{v}$ とすると、点Vは線分UQの中点であるから

$$\vec{v} = \frac{\vec{u} + \vec{q}}{2} \Leftrightarrow \vec{q} = 2\vec{v} - \vec{u}$$

となる。これを①に代入して、整理すると

$$|2\vec{v} - \vec{u} - \vec{a}| = 3 \Leftrightarrow \left| \vec{v} - \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{a}) \right| = \frac{3}{2}$$

が得られる。ここで、 $\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{a}) = \left(0, \frac{5}{2}, 0\right)$ より、点Vは半径 $\frac{3}{2}$ 、中心の座標 $\left(0, \frac{5}{2}, 0\right)$ の球面上

を動くことがわかる。したがって、 S_3 は点 $\left(0, \frac{5}{2}, 0\right)$ を中心とする半径 $\frac{3}{2}$ の球面であるから、

その方程式は

$$S_3: x^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{9}{4} \qquad \cdots \text{④}$$

である。ここで、②－④より

$$(y - 6)^2 - \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{27}{4} \Leftrightarrow y = \frac{23}{7}$$

となり、これを④に代入すると

$$x^2 + z^2 = \frac{80}{49}$$

が得られるから、円 C_2 の中心の座標は $\left(0, \frac{23}{7}, 0\right)$ 、半径は $\sqrt{\frac{80}{49}} \left(= \frac{4\sqrt{5}}{7} \right)$ であることがわかる。

〔解答〕

ソ	$-\frac{5}{2}$	タ	$\frac{5}{2}$	チ	-2	ツ	$e^{-2}x + \frac{5}{2}(1 - e^{-2})$	テ	$\frac{1}{2}(1 - e^{-2})x + \frac{5}{4}(1 + e^{-2})$
---	----------------	---	---------------	---	------	---	-------------------------------------	---	--

ト	$e^{-2}y$	ナ	$\frac{1}{2}(1 - e^{-2})y$	ニ	$\frac{5}{2e^2 + 2}$
---	-----------	---	----------------------------	---	----------------------

〔解説〕

以下、関数 $f(x) = ae^{cx} + b$ について

$$f(0) = a + b$$

$$f(1) = ae^c + b$$

$$f'(x) + 2f(x) = ace^{cx} + 2(ae^{cx} + b) = a(c+2)e^{cx} + 2b$$

$$\int_0^1 f(t) dt = \left[\frac{a}{c} e^{ct} + bt \right]_0^1 = \frac{a}{c} (e^c - 1) + b$$

となることに注意する。

〔1〕

与えられた条件を整理すると

$$f(0) = 0 \Leftrightarrow a + b = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{任意の実数 } t > 0 \text{ で } f'(t) + 2f(t) = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} a(c+2) = 0 \\ 2b = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{5}{2} \\ c = -2 \end{cases} \quad (\because a \neq 0) \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。よって、①、②より

$$a = -\frac{5}{2}, b = \frac{5}{2}, c = -2$$

と求まる。

〔2〕

与えられた条件を整理すると

$$f(0) = x \Leftrightarrow a + b = x \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\text{任意の実数 } t > 0 \text{ で } f'(t) + 2f(t) = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{5}{2} \\ c = -2 \end{cases} \quad \cdots \textcircled{4}$$

となる。よって、③、④より

$$a = x - \frac{5}{2}, b = \frac{5}{2}, c = -2$$

と求まる。このとき、 $f(1), \int_0^1 f(t) dt$ の値は

$$\begin{aligned} f(1) &= \left(x - \frac{5}{2} \right) e^{-2} + \frac{5}{2} \\ &= e^{-2}x + \frac{5}{2}(1 - e^{-2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(t) dt &= -\frac{1}{2} \left(x - \frac{5}{2} \right) (e^{-2} - 1) + \frac{5}{2} \\ &= \frac{1}{2}(1 - e^{-2})x + \frac{5}{4}(1 + e^{-2}) \end{aligned}$$

となる。

〔3〕

与えられた条件を整理すると

$$f(0) = x \Leftrightarrow a + b = y \quad \cdots \textcircled{5}$$

$$\text{任意の実数 } t > 0 \text{ で } f'(t) + 2f(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = -2 \end{cases} \quad \cdots \textcircled{6}$$

となる。よって、⑤、⑥より

$$a = y, b = 0, c = -2$$

と求まる。このとき、 $f(1), \int_0^1 f(t) dt$ の値は

$$\begin{aligned} f(1) &= e^{-2}y \\ \int_0^1 f(t) dt &= -\frac{y}{2}(e^{-2} - 1) \\ &= \frac{1}{2}(1 - e^{-2})y \end{aligned}$$

となる。

〔4〕

$g(x) = e^{-2}x + \frac{5}{2}(1 - e^{-2}), h(y) = e^{-2}y$ とするとき、合成関数 $h(g(x))$ は

$$h(g(x)) = e^{-4}x + \frac{5}{2}e^{-2}(1 - e^{-2})$$

となる。したがって、与えられた漸化式は

$$d_{n+1} = e^{-4}d_n + \frac{5}{2}e^{-2}(1 - e^{-2}) \quad \cdots \textcircled{7}$$

となるが、ここで d_n, d_{n+1} を d と置き換えた方程式を解くと

$$d = e^{-4}d + \frac{5}{2}e^{-2}(1 - e^{-2}) \quad \cdots \textcircled{8}$$

$$\Leftrightarrow d = \frac{5}{2e^2 + 2}$$

となるが、⑦－⑧より

$$\begin{aligned} d_{n+1} - d &= e^{-4}(d_n - d) \\ \therefore d_n - d &= (e^{-4})^{n-1}(d_1 - d) \end{aligned}$$

となるため、 $d_1 = 0$ と合わせると、数列 $\{d_n\}$ の一般項は

$$d_n = \left\{ 1 - (e^{-4})^{n-1} \right\} d$$

と求まる。したがって、求める極限值は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 - (e^{-4})^{n-1} \right\} d = d = \frac{5}{2e^2 + 2}$$

となる。

Ⅲ

〔解答〕

ヌ	1	ネ	-7	ノ	-24	ハ	3	ヒ	+	フ	-
ヘ	12	ホ	54	マ	$2\sqrt{5}$	ミ	10	ム	$2(\sqrt{5})^n$	メ	5^n

〔解説〕

〔1〕

$\alpha=1+2i$ について、実部、虚部がともに正であるから、 α が表す点は第1象限にあるため

$$(1-1)\cdot\frac{\pi}{2}<\theta<1\cdot\frac{\pi}{2}\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{1}$$

である。また、

$$\begin{aligned}\alpha^2&=(1+2i)^2=-3+4i\\ \alpha^4&=(\alpha^2)^2=(-3+4i)^2=-7-24i\end{aligned}$$

であるから、 α^4 が表す点は第3象限にある。ここで、 α^4 の偏角は 4θ であり、 $\textcircled{1}$ より

$$0<4\theta<2\pi$$

であるため

$$(3-1)\cdot\frac{\pi}{2}<4\theta<3\cdot\frac{\pi}{2}\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{2}$$

である。さらに、

$$\begin{aligned}\alpha^8&=(\alpha^4)^2=(-7-24i)^2=-527+336i\\ \alpha^{16}&=(\alpha^8)^2=(-527+336i)^2=(527^2-336^2)-2\cdot527\cdot336i\end{aligned}$$

であるから、 α^{16} の実部の符号は正、虚部の符号は負であり、 α^{16} が表す点は第4象限にある。

ここで、 α^{16} の偏角は 16θ であり、 $\textcircled{2}$ より

$$4\pi<16\theta<6\pi$$

であるため

$$(12-1)\cdot\frac{\pi}{2}<16\theta<12\cdot\frac{\pi}{2}$$

であり、さらにこの不等式を変形すると

$$\frac{11}{32}\pi<\theta<\frac{3}{8}\pi\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{3}$$

となる。ここで、 $m\theta>20\pi$ を満たす最小の自然数 m について、

$$(m-1)\theta\leq20\pi<m\theta$$

が成り立つ。この不等式と $\textcircled{3}$ を合わせると

$$(m-1)\cdot\frac{11}{32}\pi<20\pi<m\cdot\frac{3}{8}\pi\iff\frac{160}{3}(=53.3\cdots)<m<\frac{640}{11}+1(=59.1\cdots)$$

となるから、不等式

$$54\leq m\leq 54+5$$

が成り立つことがわかる。

〔2〕

点 P_n の定め方から、三角形 OP_nP_{n+1} は三角形 OP_0P_1 を原点を中心に $|\alpha|^n$ 倍だけ相似拡大し、 $n\theta$ だけ回転した図形であることがわかる。線分 P_0P_1 の長さは2であり、直角三角形 OP_0P_1 の面積は1であるから、それぞれ

$$\text{線分 } P_1P_2 \text{ の長さ： } 2\cdot|\alpha|=2\sqrt{5}$$

$$\text{線分 } P_2P_3 \text{ の長さ： } 2\cdot|\alpha|^2=10$$

$$\text{線分 } P_nP_{n+1} \text{ の長さ： } 2\cdot|\alpha|^n=2(\sqrt{5})^n$$

$$\text{三角形 } OP_nP_{n+1} \text{ の面積： } 1\cdot(|\alpha|^n)^2=5^n$$

と求まる。

IV

【解答】

モ	$\frac{1}{6}$	ヤ	$\frac{5}{6}$	コ	$\frac{5}{6}$	ヨ	$\frac{2}{27}$	ヲ	$\frac{35}{54}$	リ	$\frac{5}{18}$
---	---------------	---	---------------	---	---------------	---	----------------	---	-----------------	---	----------------

ル	$\frac{1}{6}$	レ	$\frac{-k^2+6k+3}{18}$
---	---------------	---	------------------------

【解説】

m 回目の試行後に裏が上になっているトランプのカードが k 枚であるとき、 $m+2$ 回目の試行後に裏が上になっているトランプのカードが l 枚である条件付き確率は m によらない。この条件付き確率を $q_{k,l}$ とおく。

確率	m 回目裏カード	$m+1$ 回目出た目	$m+2$ 回目出た目	値
$q_{0,0}$	なし	a とする	a	$\frac{1}{6}$
$q_{0,2}$	なし	a とする	a 以外	$\frac{5}{6}$
$q_{2,0}$	a, b とする	a	b	$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$
		b	a	
$q_{2,2}$	a, b とする	a	b 以外	$\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{11}{18}$
		b	a 以外	
		c とする	a, b, c のいずれか	
$q_{2,4}$	a, b とする	c とする	a, b, c 以外	$\frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{3}$

(ただし、 a, b, c は 1 から 6 までの異なる自然数とする)

〔1〕

$p_{m,k}, q_{k,l}$ の定め方から、上表より

$$p_{2,0} = q_{0,0} = \frac{1}{6}, \quad p_{2,2} = q_{0,2} = \frac{5}{6}$$

となる。また、2 回目の試行後に裏が上になっているカードが 0 枚であるとき、4 回目の試行後に裏が上になっているカードが 2 枚である確率も $q_{0,2}$ に等しく、 $\frac{5}{6}$ となる。

〔2〕

偶数回の試行後に裏が上になっているカードの枚数は偶数であることに注意すると、上表より、 $p_{4,0}, p_{4,2}, p_{4,4}$ の値は

$$\begin{aligned} p_{4,0} &= q_{0,0} \cdot q_{0,0} + q_{0,2} \cdot q_{2,0} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{18} = \frac{2}{27} \\ p_{4,2} &= q_{0,0} \cdot q_{0,2} + q_{0,2} \cdot q_{2,2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{11}{18} = \frac{35}{54} \\ p_{4,4} &= q_{0,2} \cdot q_{2,4} = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{18} \end{aligned}$$

と求まる。

〔3〕

確率 $q_{k,k}$ を求めればよい。

確率	m 回目裏カード	$m+1$ 回目出た目	$m+2$ 回目出た目	値
$q_{0,0}$	なし	a とする	a	$\frac{1}{6}$
$q_{k,k}$	k 枚	裏カードの目 (k 枚)	表カードの目 ($7-k$ 枚)	$\frac{k}{6} \cdot \frac{7-k}{6} + \frac{6-k}{6} \cdot \frac{k+1}{6}$ $= \frac{-k^2+6k+3}{18}$
		表カードの目 ($6-k$ 枚)	裏カードの目 ($k+1$ 枚)	
$q_{6,6}$	すべて	a とする	a	$\frac{1}{6}$

(ただし、 k は 2 から 5 までの自然数、 a は 1 から 6 までの自然数とする)

上表より、 $k=0$ または $k=6$ のとき $\frac{1}{6}$ であり、それ以外るとき $\frac{-k^2+6k+3}{18}$ である。