

I

〔解答〕

〔1〕	ア	イ	ウ	キ
	t^2-2t	-1	$\sqrt{2}$	
	エ	オ	カ	
	π	3	$\frac{3}{4}\pi$	
〔2〕	ク	ケ	コ	
	$\log_3(-3+\sqrt{10})$	$\frac{2+2\sqrt{10}}{9}$	1	
〔3〕	サ	シ	ス	
	79	3^n-2	$\frac{3^{n+1}}{2}-2n-\frac{3}{2}$	

〔解説〕

〔1〕

(a)

$$\begin{aligned}
 t &= \sin x + \cos x \text{ のとき, 関数 } f(x) = \sin 2x - 2 \sin x - 2 \cos x + 1 \text{ を } t \text{ で表した関数を } g(t) \text{ とすると} \\
 f(x) &= \sin 2x - 2 \sin x - 2 \cos x + 1 \\
 &= 2 \sin x \cos x - 2(\sin x + \cos x) + 1 \\
 &= (\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x) - 2(\sin x + \cos x) \\
 &= (\sin x + \cos x)^2 - 2(\sin x + \cos x) \\
 \therefore g(t) &= t^2 - 2t
 \end{aligned}$$

である。また, 三角関数の合成公式を用いることにより

$$\begin{aligned}
 t &= \sin x + \cos x \\
 &= \sqrt{2} \left(\sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos x \right) \\
 &= \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)
 \end{aligned}$$

となるから, x のとりうる値の範囲が $0 \leq x \leq \pi$ であるとき, t のとりうる値の範囲は

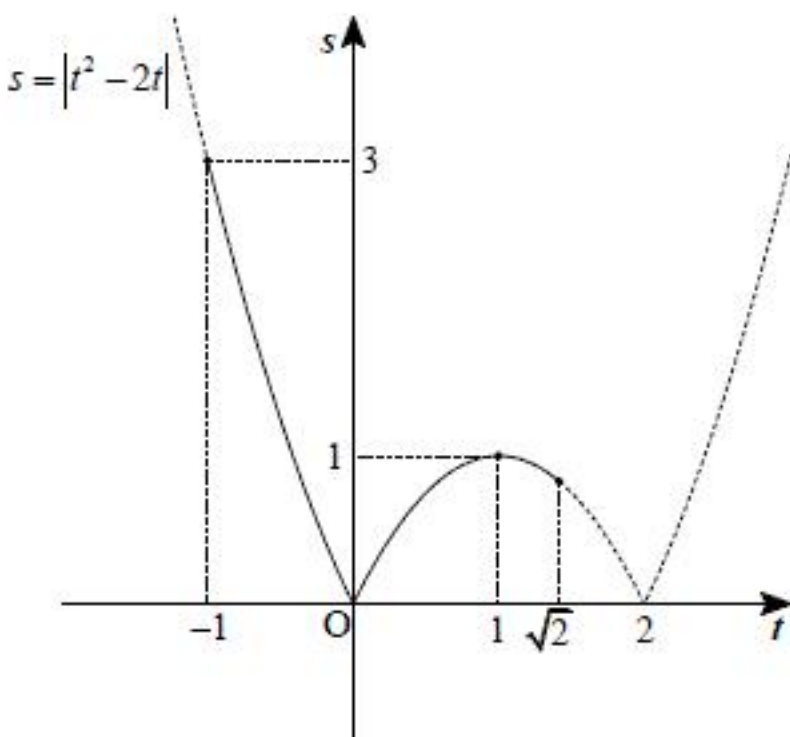
$$-1 \left(= \sqrt{2} \sin \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) \right) \leq t \leq \sqrt{2} \left(= \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

である。

(b)

(a)の結果より, 関数 $|f(x)|$ ($0 \leq x \leq \pi$) の最大値, 最小値は関数 $|g(t)|$ ($-1 \leq t \leq \sqrt{2}$) の最大値,

最小値と一致する。ここで, 関数 $s = |g(t)|$ を図示すると, 以下の図のようになる。



したがって, 求める最大値, 最小値は

$$\text{最大値は } t = -1 (\Leftrightarrow x = \pi) \text{ のとき, } |g(-1)| = 3$$

$$\text{最小値は } t = 0 \left(\Leftrightarrow x = \frac{3}{4}\pi \right) \text{ のとき, } |g(0)| = 0$$

であることがわかる。

〔2〕

(a)

x の方程式 $9^x - a \cdot 3^{x+1} + a + 1 = 0$ について, $a = -2$ のとき $t = 3^x (> 0)$ とおくと

$$t^2 + 6t - 1 = 0$$

となり, この2次方程式の解は $t = -3 + \sqrt{10} (> 0)$ であるから, 求める実数解は

$$x = \log_3(-3 + \sqrt{10})$$

であることがわかる。

(b)

x の方程式 $9^x - a \cdot 3^{x+1} + a + 1 = 0$ が異なる2つの正の実数解をもつのは, t の2次方程式

$t^2 - 3at + a + 1 = 0$ が $t > 1$ を満たす異なる2つの実数解をもつときである。この条件について,

放物線 $s = t^2 - 3at + a + 1 = \left(t - \frac{3}{2}a\right)^2 - \frac{9}{4}a^2 + a + 1$ の位置関係を考えることによって

$$\begin{cases}
 \text{軸に関する条件(①): } 1 < \frac{3}{2}a \Leftrightarrow a > \frac{2}{3} \\
 \text{頂点に関する条件(②): } -\frac{9}{4}a^2 + a + 1 < 0 \Leftrightarrow a < \frac{2-2\sqrt{10}}{9}, \frac{2+2\sqrt{10}}{9} < a \\
 \text{端点}(t=1)\text{に関する条件(③): } 1^2 - 3a \cdot 1 + 1 + 1 > 0 \Leftrightarrow a < 1
 \end{cases}$$

より, ①かつ②かつ③を考えればよく, ここで $\frac{2-2\sqrt{10}}{9} < \frac{2}{3} < \frac{2+2\sqrt{10}}{9} < 1 \left(\because 2 < \sqrt{10} < \frac{7}{2} \right)$ で

あることから, 求める a の値の範囲は

$$\frac{2+2\sqrt{10}}{9} < a < 1$$

であることがわかる。

〔3〕

a_n は「 n 桁の3進数のなかで2番目に大きい数を, 10進数で表した数」であるから

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 1_{(3)} = 10_{(3)} - 2_{(3)} = 3^1_{(10)} - 2_{(10)} = 1_{(10)} \\
 a_2 &= 21_{(3)} = 100_{(3)} - 2_{(3)} = 3^2_{(10)} - 2_{(10)} = 7_{(10)} \\
 a_3 &= 221_{(3)} = 1000_{(3)} - 2_{(3)} = 3^3_{(10)} - 2_{(10)} = 25_{(10)} \\
 a_4 &= 2221_{(3)} = 10000_{(3)} - 2_{(3)} = 3^4_{(10)} - 2_{(10)} = 79_{(10)}
 \end{aligned}$$

であり, 第 n 項 a_n は

$$a_n = 3^n_{(10)} - 2_{(10)} = 3^n - 2$$

である。次に, 初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (3^k - 2) = \frac{3^1 - 3^{n+1}}{1-3} - 2n = \frac{3^{n+1}}{2} - 2n - \frac{3}{2}$$

であることがわかる。

【解答】

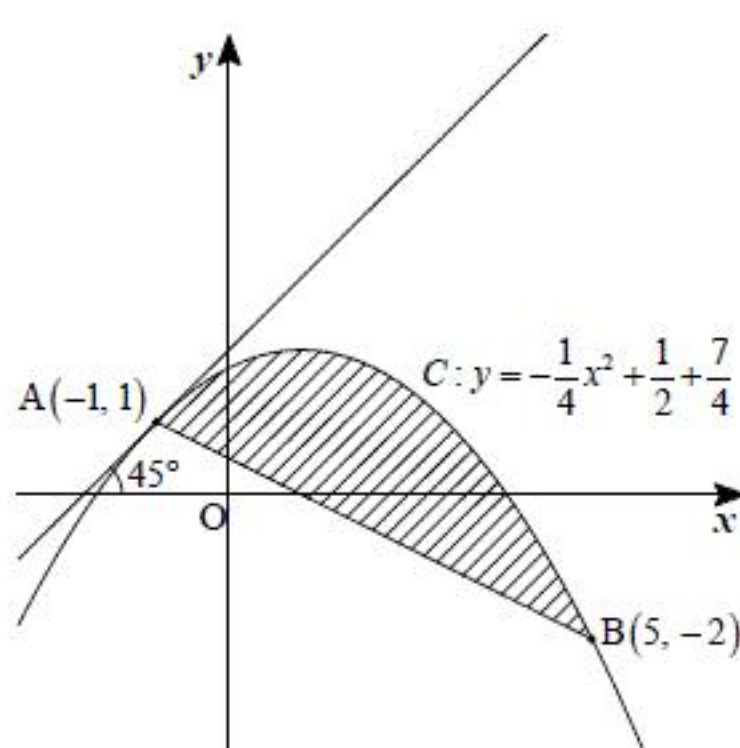
ア	イ	
$-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{7}{4}$	9	
ウ	エ	オ
2	-12	3
カ	キ	ク
$2 - \sqrt{4-n}$	$-\frac{9}{4}$	$\frac{1}{5}n^2 - \frac{6}{5}n + \frac{9}{5}$

【解説】

放物線 C の方程式を $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) とおくと、その導関数は $y' = 2ax + b$ であるため、2 点 $A(-1, 1)$, $B(5, -2)$ を通り、点 A における接線が x 軸の正の向きと 45° の角をなす($\Leftrightarrow$ 傾きが1)という条件から

$$\begin{cases} 1 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c \\ -2 = a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c \\ 1 = 2a \cdot (-1) + b \end{cases} \Leftrightarrow (a, b, c) = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right)$$

となる。したがって、放物線 C の方程式は $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{7}{4}$ であることがわかる。



また、放物線 C と線分 AB で囲まれた部分の面積は

$$\begin{aligned} \int_{-1}^5 \left\{ \left(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{7}{4} \right) - \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right) \right\} dx &= \int_{-1}^5 -\frac{1}{4}(x+1)(x-5) dx \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \{ 5 - (-1) \}^3 \\ &= 9 \end{aligned}$$

と求まる。

次に、線分 AB の傾きは $\frac{-2-1}{5-(-1)} = -\frac{1}{2}$ であるから、直交する直線 l の傾きは2であり、 y 切片を n とすると

$$y = 2x + n$$

である。ここで、直線 l が点 A, B を通るときの値はそれぞれ $n = 3, -12$ であるから、 n の値の範囲は

$$-12 \leq n \leq 3$$

である。

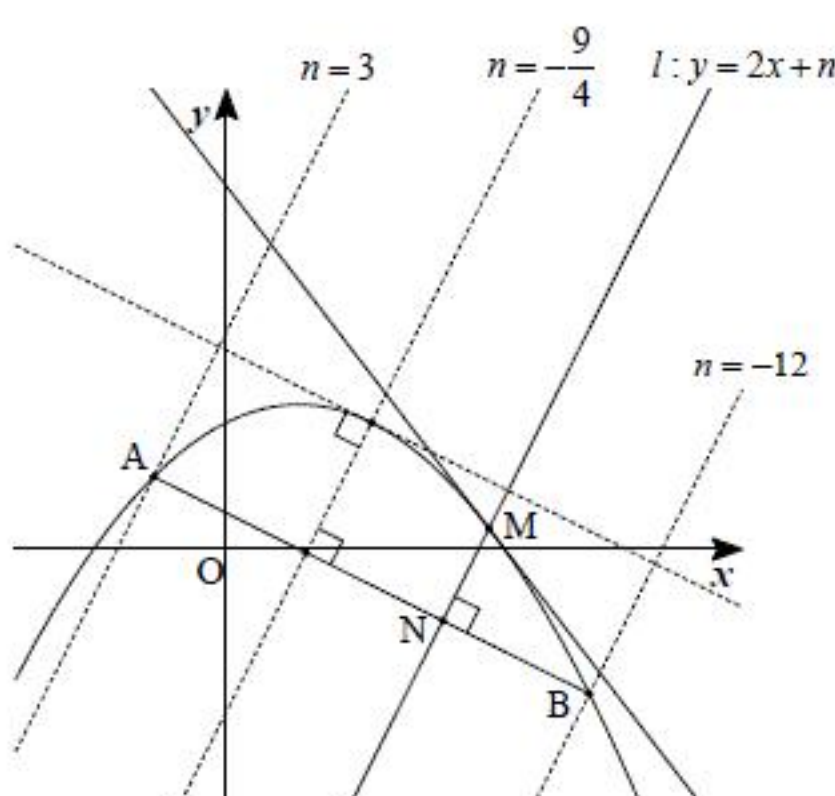
さらに、直線 l と放物線 C との共有点を M 、直線 l と線分 AB の交点を N とすると、点 $M(\neq N)$ の x 座標の値は

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{7}{4} \\ y = 2x + n \end{cases} &\Rightarrow -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{7}{4} = 2x + n \\ &\Leftrightarrow x^2 + 6x + 4n - 7 = 0 \\ \therefore x &= -3 + 2\sqrt{4-n} \quad (\because -12 < n < 3, -1 < x < 5) \end{aligned}$$

であるから、点 M における放物線 C の接線の傾きは、 n を用いて表すと

$$-\frac{1}{2}(-3 + 2\sqrt{4-n}) + \frac{1}{2} = 2 - \sqrt{4-n}$$

となる。

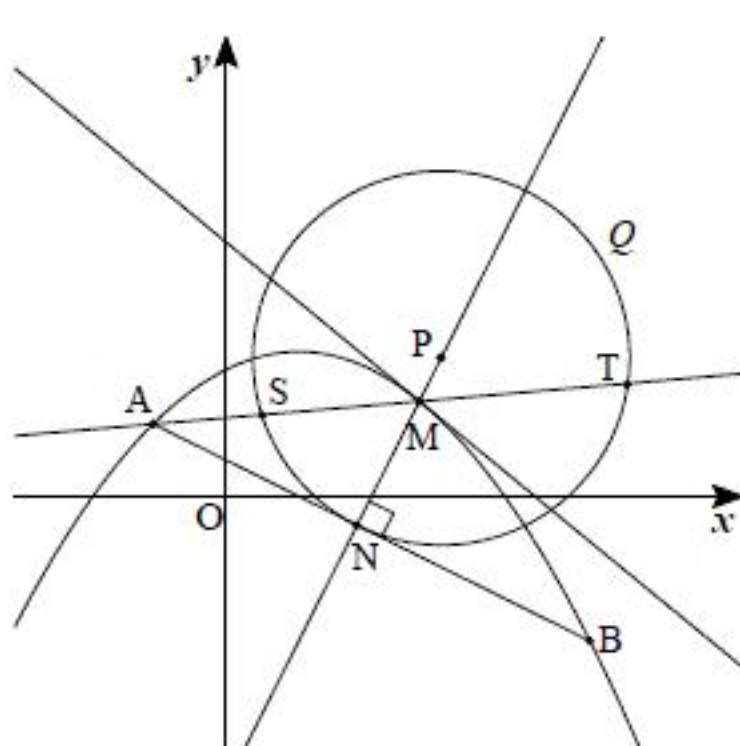


したがって、線分 MN の長さが最大となるのは、この接線の傾きと線分 AB の傾きが一致するときであることから、このときの n の値は

$$2 - \sqrt{4-n} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow n = -\frac{9}{4}$$

である。

また、直線 l 上に、点 M に対して点 N と反対側に任意の点 P をとり、この点を中心にして線分 AB に接する円 Q を考えたとき、円 Q と直線 AM の交点を S, T とすると $AS \cdot AT$ の値は、方べきの定理より AN^2 の値と一致する。



ここで、点 N の座標は

$$\begin{cases} y = 2x + n \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = \left(-\frac{2}{5}n + \frac{1}{5}, \frac{1}{5}n + \frac{2}{5}\right)$$

であるから、求める値は

$$\begin{aligned} AS \cdot AT &= AN^2 \\ &= \left\{ \left(-\frac{2}{5}n + \frac{1}{5} \right) - (-1) \right\}^2 + \left\{ \left(\frac{1}{5}n + \frac{2}{5} \right) - 1 \right\}^2 \\ &= \left(\frac{4}{25}n^2 - \frac{24}{25}n + \frac{36}{25} \right) + \left(\frac{1}{25}n^2 - \frac{6}{25}n + \frac{9}{25} \right) \\ &= \frac{1}{5}n^2 - \frac{6}{5}n + \frac{9}{5} \end{aligned}$$

となる。

Ⅲ

〔解答〕

ア			
$\overrightarrow{CA}+t\overrightarrow{AB}$			
イ	ウ	エ	オ
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
カ	キ		
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$		
ク	ケ	コ	
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	
サ	シ		
5	$\frac{4}{15}$		

〔解説〕

線分 AB を $t:(1-t)$ ($0 < t < 1$) に内分する点を P とするとき、内分点の公式より、 $\overrightarrow{CP}$ は $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AB}$ を用いて

$$\overrightarrow{CP} = (1-t)\overrightarrow{CA} + t\overrightarrow{CB} = (1-t)\overrightarrow{CA} + t(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{CA} + t\overrightarrow{AB}$$

と表せる。点 P が、点 C から線分 AB に下した垂線の交点になるのは、 $\overrightarrow{CP} \perp \overrightarrow{AB}$ となるときであり、内積を計算することによって、そのときの t の値は

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{AB} &= 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{CA} + t\overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ &\Leftrightarrow \{(2, 1, -2) + t(-2, 2, 0)\} \cdot (-2, 2, 0) = 0 \\ &\Leftrightarrow -2(2-2t) + 2(1+2t) = 0 \\ &\therefore t = \frac{1}{4} \quad (\because 0 < t < 1) \end{aligned}$$

と求まる。このとき、点 P の座標は

$$\overrightarrow{OP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

である。

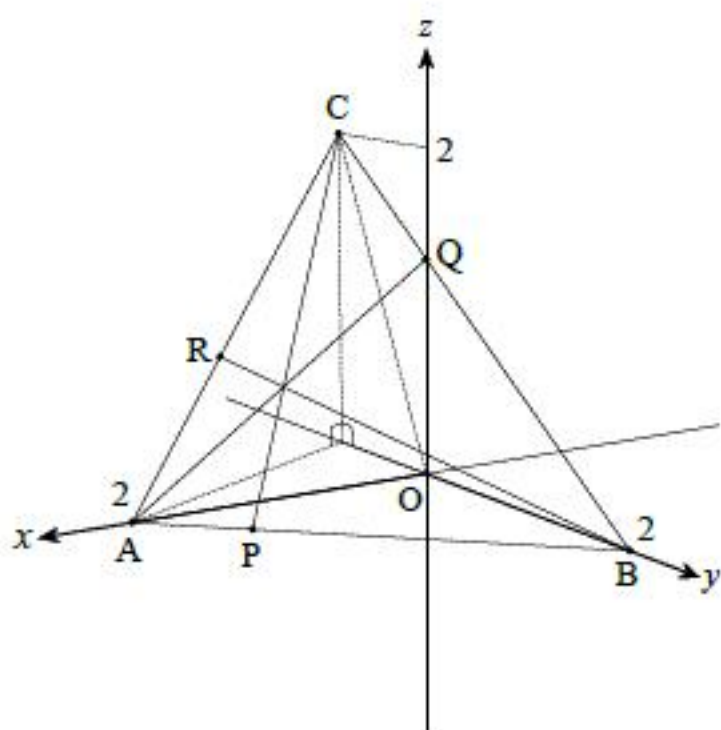
線分 BC 上の点は実数 s ($0 < s < 1$) を用いて

$$(1-s)\overrightarrow{OB} + s\overrightarrow{OC} = (0, 2-3s, 2s)$$

と表せるから、線分 BC と z 軸の交点 Q について、 $\overrightarrow{OQ}$ を $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ を用いて表すと

$$\begin{aligned} 2-3s &= 0 \Leftrightarrow s = \frac{2}{3} \quad (\because 0 < s < 1) \\ \therefore \overrightarrow{OQ} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC} \end{aligned}$$

となる。



線分 AQ と線分 CP の交点と点 B を通る直線が、線分 CA と交わる点を R とするとき、 $\triangle ABC$ にチェバの定理を用いることにより

$$\begin{aligned} \frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} &= 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{CR}{RA} = 1 \\ \therefore \frac{CR}{RA} &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

であることがわかる。

$\triangle ABC$, $\triangle PQR$ の面積について、 $\triangle PQR = \triangle ABC - (\triangle ARP + \triangle BPQ + \triangle CQR)$ であり

$$\triangle ARP : \triangle ABC = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} : 1 \cdot 1 = \frac{1}{10} : 1$$

$$\triangle BPQ : \triangle ABC = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} : 1 \cdot 1 = \frac{1}{2} : 1$$

$$\triangle CQR : \triangle ABC = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} : 1 \cdot 1 = \frac{1}{5} : 1$$

$$\therefore \triangle PQR = \left\{ 1 - \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right) \right\} \triangle ABC = \frac{1}{5} \triangle ABC$$

となるから $\triangle ABC$ の面積と $\triangle PQR$ の面積の比は $5:1$ であり、ここで四面体 $OABC$ の体積は

$$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \right) \cdot 2 = \frac{4}{3}$$

となるから四面体 $OPQR$ の体積は

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{15}$$

であることがわかる。

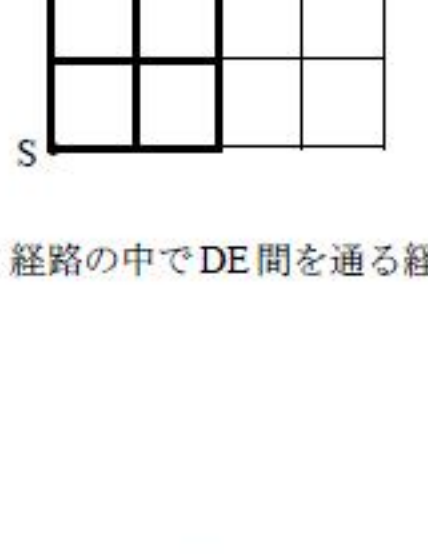
【解答】

	ア	イ	ウ	
[1]	30	20	50	
[2]	エ	オ	カ	
	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{50}$	8	
	キ	ク	ケ	コ
	400	18	24	$\frac{1}{10}$

【解説】

[1]

(a)

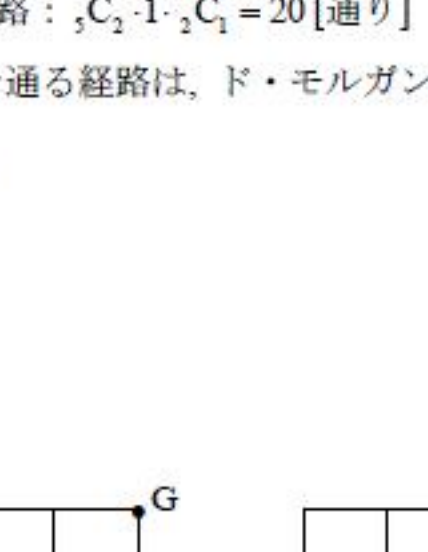


最短距離で点Sから点Gへ行く経路の中で点Dを通る経路は、上図の太線部を通る経路であるから、求める場合の数は

$${}_3C_2 \cdot {}_3C_1 = 30 \text{ [通り]}$$

である。

(b)



最短距離で点Sから点Gへ行く経路の中でDE間を通る経路は、上図の太線部を通る経路であるから、求める場合の数は

$${}_3C_2 \cdot {}_1C_1 = 20 \text{ [通り]}$$

である。

(c)

(a), (b)と同様に考えることにより、点D、点E、点Dかつ点Eを通る経路はそれぞれ

$$\text{点Dを通る経路：} {}_3C_2 \cdot {}_3C_1 = 30 \text{ [通り]}$$

$$\text{点Eを通る経路：} {}_6C_3 \cdot {}_2C_1 = 40 \text{ [通り]}$$

$$\text{点Dかつ点Eを通る経路：} {}_3C_2 \cdot {}_1C_1 = 20 \text{ [通り]}$$

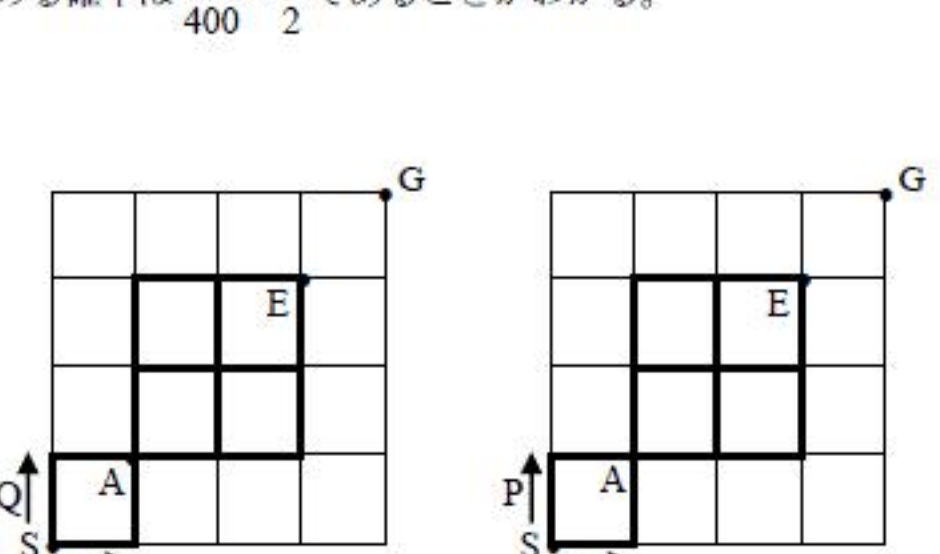
であるから、点Dまたは点Eを通る経路は、ド・モルガンの法則より

$$30 + 40 - 20 = 50 \text{ [通り]}$$

と求まる。

[2]

(a)



PとQの2人が点Sと同時に出発して最短距離で点Eに向かうとき、経路の選び方の総数は

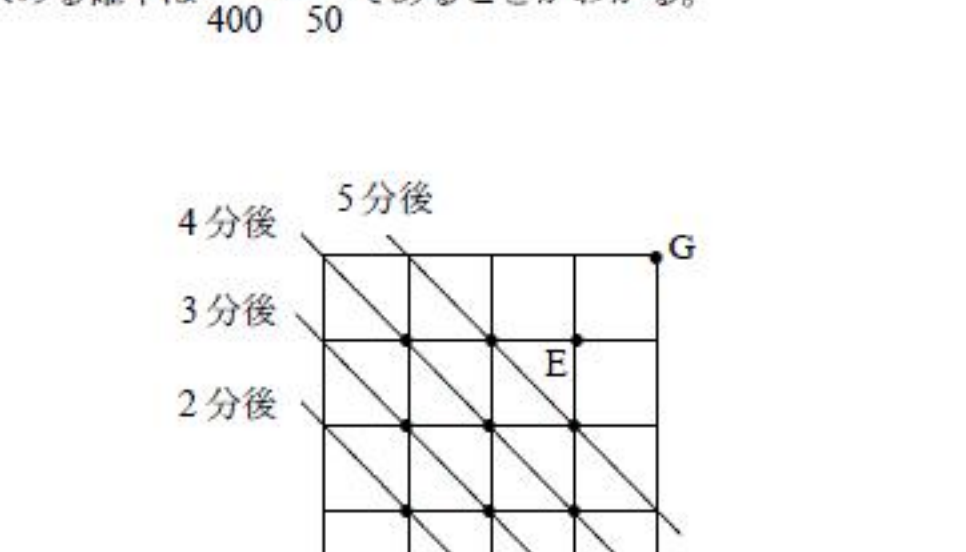
$${}_6C_3 \cdot {}_6C_3 = 400 \text{ [通り]}$$

であり、これらは同様に確からしく起こる。P、Qが1分後に同じ位置にいる経路は、上図より

$$(1 \cdot {}_3C_2) \cdot (1 \cdot {}_3C_2) + (1 \cdot {}_3C_2) \cdot (1 \cdot {}_3C_2) = 200 \text{ [通り]}$$

であるから、求める確率は $\frac{200}{400} = \frac{1}{2}$ であることがわかる。

(b)



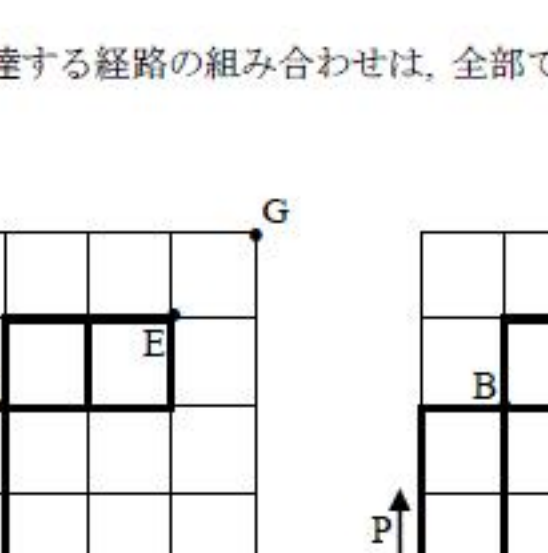
PとQが2分後に点Aで初めて再会する経路は、上図より

$$(1 \cdot 1) \cdot ({}_4C_2 \cdot {}_4C_2) + (1 \cdot 1) \cdot ({}_4C_2 \cdot {}_4C_2) = 72 \text{ [通り]}$$

であるから、求める確率は $\frac{72}{400} = \frac{9}{50}$ であることがわかる。

(c)

①

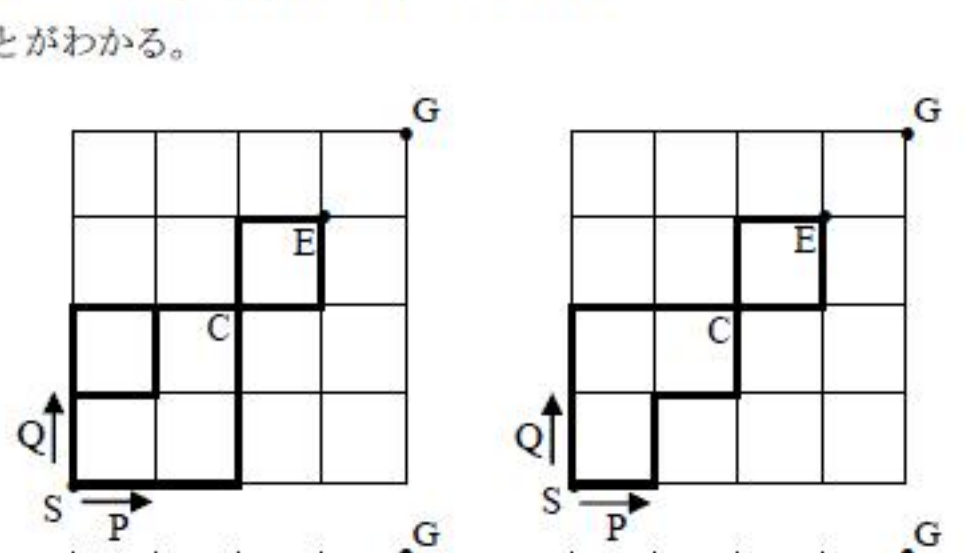


PとQが2分後、3分後、4分後あるいは5分後に初めて再会する可能性がある位置は、上図より、全部で8か所であることがわかる。

②

PとQが点Eに到達する経路の組み合わせは、全部で ${}_6C_3 \cdot {}_6C_3 = 400$ 通りである。

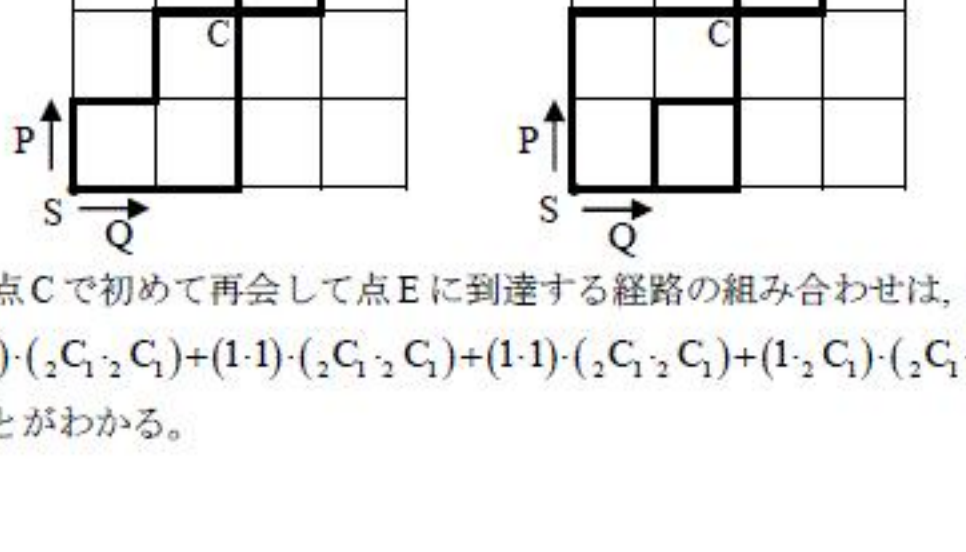
③



PとQが点Bで初めて再会して点Eに到達する経路の組み合わせは、上図より

$$(1 \cdot 1) \cdot ({}_3C_1 \cdot {}_3C_1) + (1 \cdot 1) \cdot ({}_3C_1 \cdot {}_3C_1) = 18 \text{ [通り]}$$

であることがわかる。



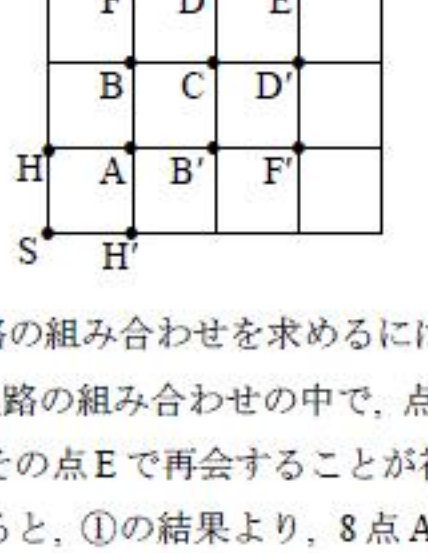
PとQが点Cで初めて再会して点Eに到達する経路の組み合わせは、上図より

$$(1 \cdot {}_2C_1) \cdot ({}_2C_1 \cdot {}_2C_1) + (1 \cdot 1) \cdot ({}_2C_1 \cdot {}_2C_1) + (1 \cdot 1) \cdot ({}_2C_1 \cdot {}_2C_1) + (1 \cdot {}_2C_1) \cdot ({}_2C_1 \cdot {}_2C_1) = 24 \text{ [通り]}$$

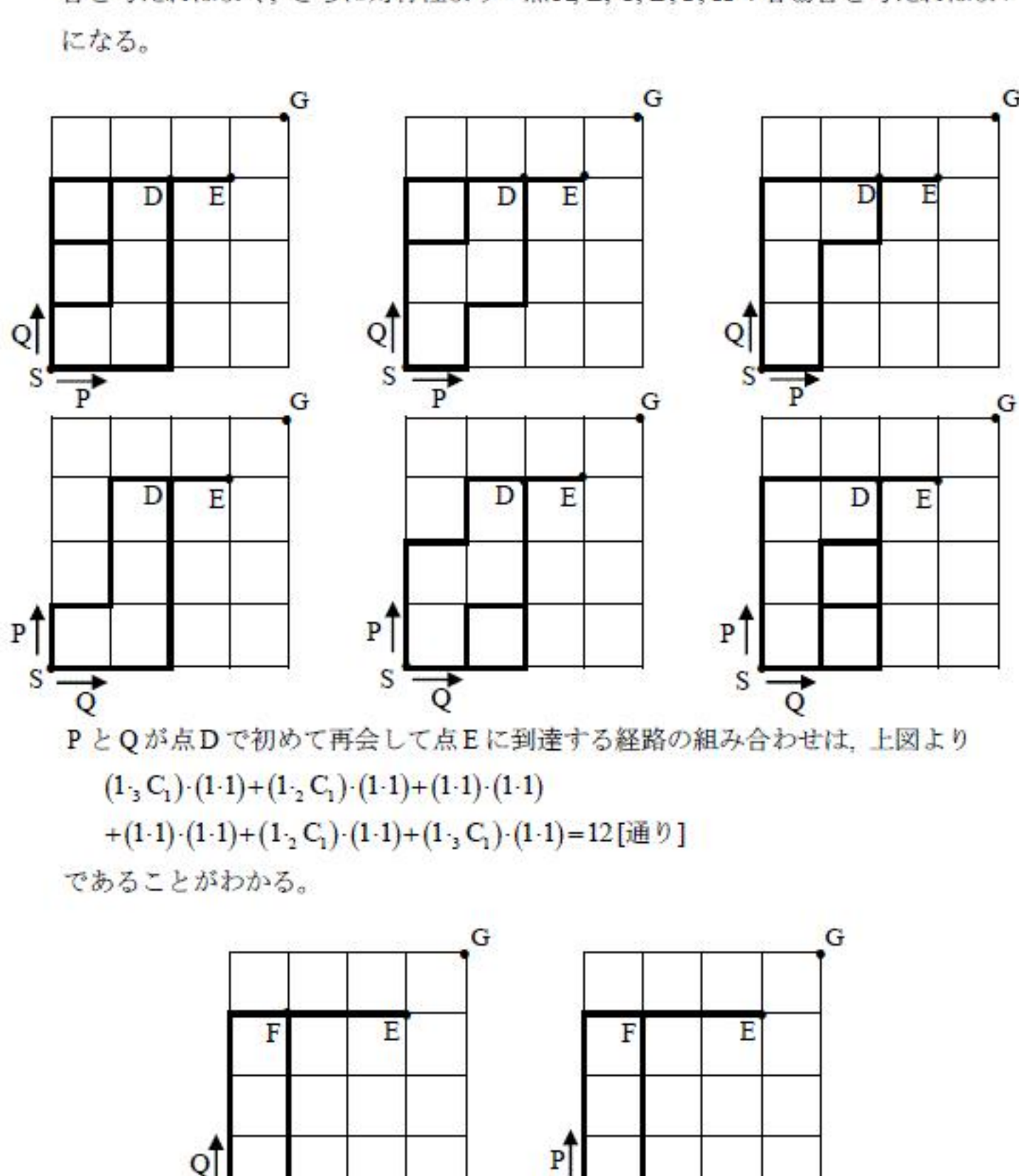
であることがわかる。

④

PとQが点Eで初めて再会する確率を考える。以下の図のように点をおくことにする。



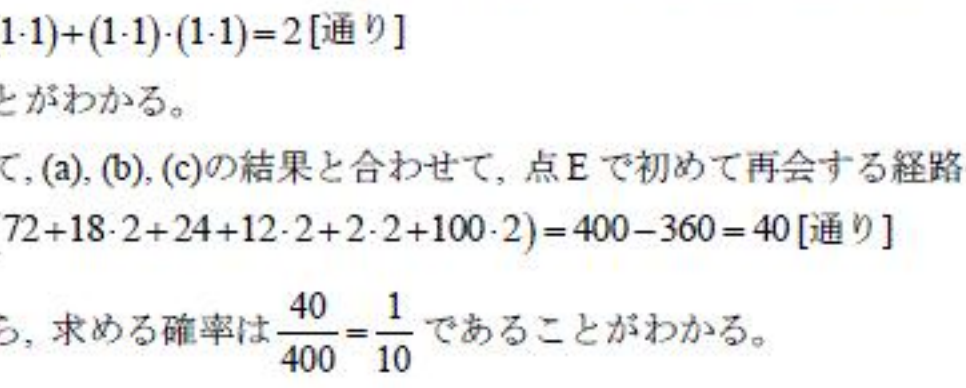
点Eで初めて再会する経路の組み合わせを求めるには、点Eに到達する経路の組み合わせから、点Eに到達する経路の組み合わせの中で、点Eで再会することが初めてでないものを除けばよい。また、その点Eで再会することが初めてでないものについて、初めて再会する点で場合分けすると、①の結果より、8点A, B, B', C, D, D', F, F', H, H'の各場合を考えればよく、さらに対称性より6点A, B, C, D, F, Hの各場合を考えればよいことになる。



PとQが点Dで初めて再会して点Eに到達する経路の組み合わせは、上図より

$$(1 \cdot {}_3C_1) \cdot (1 \cdot 1) + (1 \cdot {}_2C_1) \cdot (1 \cdot 1) + (1 \cdot 1) \cdot (1 \cdot 1) + (1 \cdot 1) \cdot (1 \cdot 1) + (1 \cdot {}_2C_1) \cdot (1 \cdot 1) + (1 \cdot {}_3C_1) \cdot (1 \cdot 1) = 12 \text{ [通り]}$$

であることがわかる。



PとQが点Fで初めて再会して点Eに到達する経路の組み合わせは、上図より

$$(1 \cdot 1) \cdot (1 \cdot 1) + (1 \cdot 1) \cdot (1 \cdot 1) = 2 \text{ [通り]}$$

であることがわかる。

したがって、(a), (b), (c)の結果と合わせて、点Eで初めて再会する経路の組合せは

$$400 - (72 + 18 \cdot 2 + 24 + 12 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 100 \cdot 2) = 400 - 360 = 40 \text{ [通り]}$$

となるから、求める確率は $\frac{40}{400} = \frac{1}{10}$ であることがわかる。