

I

〔解答〕

[1]	(a)	ア	イ	ウ						
		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$						
	(b)	エ	オ							
		$\frac{k^2+k-1}{k^2+k+1}$	$-\frac{5}{3}$							
[2]		カ	キ	ク	ケ					
		13800	2300	$\frac{104}{115}$	$\frac{39}{50}$					
[3]		コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ
		75	2	3	2	2	10	7	6	4

〔解説〕

[1] (a)

$x = \cos \theta, y = \sin \theta (0 \leq \theta < 2\pi)$ とおくと、 $x > 0, y > 0$ より $\cos \theta > 0, \sin \theta > 0$ となるから

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ となる。

$$\begin{aligned} xy &= \cos \theta \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} \sin 2\theta \end{aligned}$$

となる。 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $0 < 2\theta < \pi$ であるから、 xy の値は $2\theta = \frac{\pi}{2}$ ，すなわち $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき最大

となる。よって、 xy は $x = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, y = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき

$$\text{最大値 } \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

をとる。

(b)

z を k を用いて表すと $x \neq 0$ より

$$\begin{aligned} z &= \frac{-x^2 + xy + y^2}{x^2 + xy + y^2} \\ &= \frac{-1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \\ &= \frac{k^2 + k - 1}{k^2 + k + 1} \\ &= 1 - \frac{2}{k^2 + k + 1} \end{aligned}$$

となる。 z が最小値をとるのは $\frac{2}{k^2 + k + 1}$ が最大となるとき、すなわち $k^2 + k + 1$ が最小となる

ときである。ここで、 x は 0 以外の全実数、 y は全実数を取りうるから k は全実数を取りうる。また、

$$k^2 + k + 1 = \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

となるから、 $k^2 + k + 1$ は $k = -\frac{1}{2}$ のとき最小値 $\frac{3}{4}$ をとる。よって、 z の最小値は $k = -\frac{1}{2}$ のときであり

$$\begin{aligned} z &= 1 - \frac{2}{\left(\frac{3}{4}\right)} \\ &= -\frac{5}{3} \end{aligned}$$

となる。

[2]

委員長、副委員長、書記を 1 名ずつ選ぶ組合せは

$${}_{25}P_3 = 25 \cdot 24 \cdot 23 = 13800 \text{ (通り)}$$

である。役職を決めずに役員 3 名を選ぶ組合せは

$${}_{25}C_3 = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{3 \cdot 2} = 2300 \text{ (通り)}$$

である。男子 12 名、女子 13 名であるとき、選ばれる 3 名のクラス役員の中に女子が少なくとも 1 名含まれるという事象の余事象は選ばれる 3 名のクラス役員がすべて男子であるという事象であり、この確率は

$$\begin{aligned} \frac{{}_{12}C_3}{{}_{25}C_3} &= \frac{\frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1}}{\frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{3 \cdot 2 \cdot 1}} \\ &= \frac{11}{115} \end{aligned}$$

となる。よって、選ばれる 3 名のクラス役員の中に女子が少なくとも 1 名含まれる確率は

$$1 - \frac{11}{115} = \frac{104}{115}$$

である。また、選ばれる 3 名のクラス役員の中に、男子および女子がそれぞれ少なくとも 1 名含まれる事象の余事象は選ばれる 3 名のクラス役員がすべて男子であるという事象とすべて女子であるという事象の和事象であり、この確率は

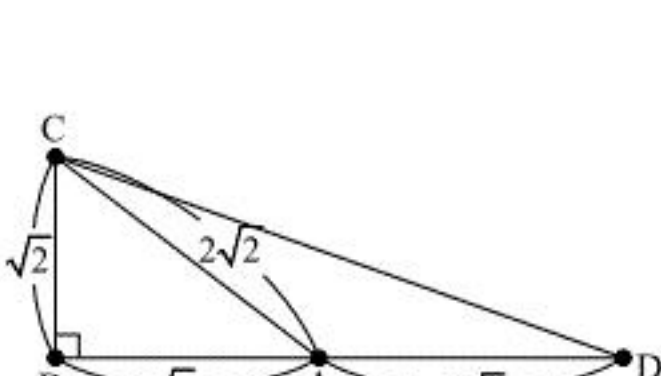
$$\begin{aligned} \frac{{}_{12}C_3 + {}_{13}C_3}{{}_{25}C_3} &= \frac{\frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2 \cdot 1}}{\frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{3 \cdot 2 \cdot 1}} \\ &= \frac{11}{50} \end{aligned}$$

となる。よって、選ばれる 3 名のクラス役員の中に、男子および女子が少なくとも 1 名含まれる確率は

$$1 - \frac{11}{50} = \frac{39}{50}$$

となる。

[3]



三角形 ABC は $BC : CA : AB = 1 : 2 : \sqrt{3}$ である直角三角形であるから、 $\angle BCA = 60^\circ$ ， $\angle CAB = 30^\circ$ となる。ゆえに、 $\angle DAC = 150^\circ$ となり、三角形 ACD は $AD = AC$ の二等辺三角形であるから

$$\begin{aligned} \angle ACD &= \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} \\ &= 15^\circ \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \angle BCD &= \angle BCA + \angle ACD \\ &= 60^\circ + 15^\circ \\ &= 75^\circ \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} \tan \angle BCD &= \frac{BD}{BC} \\ &= \frac{BA + AD}{BC} \\ &= \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{6}}{\sqrt{2}} \\ &= 2 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\triangle BCD$ において三平方の定理から

$$\begin{aligned} CD &= \sqrt{2 + (2\sqrt{2} + \sqrt{6})^2} \\ &= 2\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} \\ &= 2\sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} \\ &= 2 + 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。次に、直線 DE は $\angle BDC$ の二等分線であるから

$$\begin{aligned} BE : EC &= DB : DC \\ \Leftrightarrow BE : EC &= 2\sqrt{2} + \sqrt{6} : 2 + 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

が成り立つ。よって

$$\begin{aligned} BE &= BC \cdot \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2\sqrt{2} + \sqrt{6} + 2 + 2\sqrt{3}} \\ &= \frac{2(2 + \sqrt{3})}{(\sqrt{6} + \sqrt{3} + 2 + \sqrt{2}) + (\sqrt{3} + \sqrt{2})} \\ &= \frac{2(2 + \sqrt{3})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})} \\ &= \frac{2(2 + \sqrt{3})(\sqrt{3} - \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})}{2} \\ &= 10 - 7\sqrt{2} + 6\sqrt{3} - 4\sqrt{6} \end{aligned}$$

となる。

Ⅱ

〔解答〕

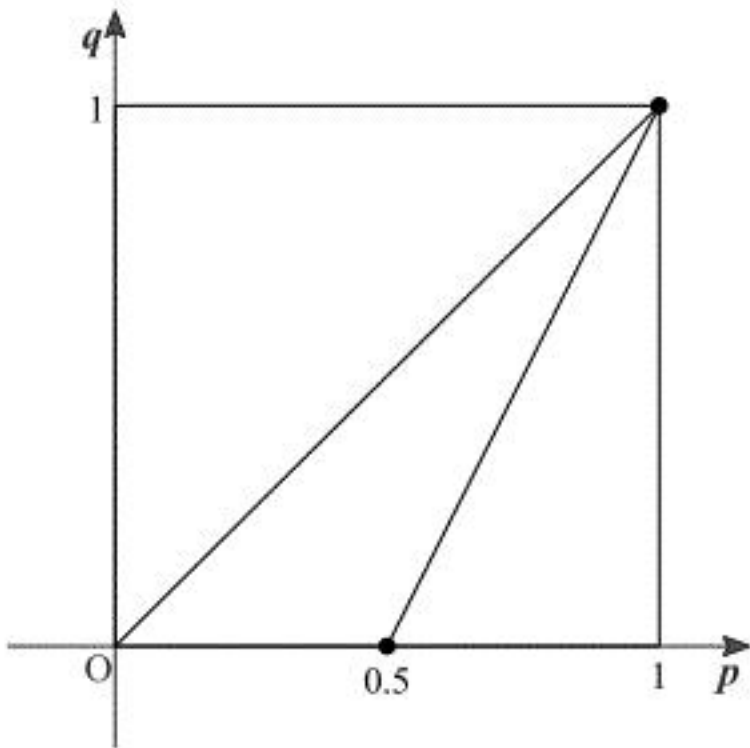
ア	イ	ウ	エ	オ	カ
50	0	100	0	0.25	0.15
キ	ク	ケ	コ	サ	
0.05	0.3	0.1	C	10	

〔解説〕

最も均等な分配は $\{50, 50\}$ ，最も不均等な分配は $\{0, 100\}$ である。分配 A について， $(p_1, q_1) = (0.5, 0.5)$ である。点 (p_1, q_1) は均等分配線上にあるから，分配 A の集中面積は

$$\lambda_A = 0$$

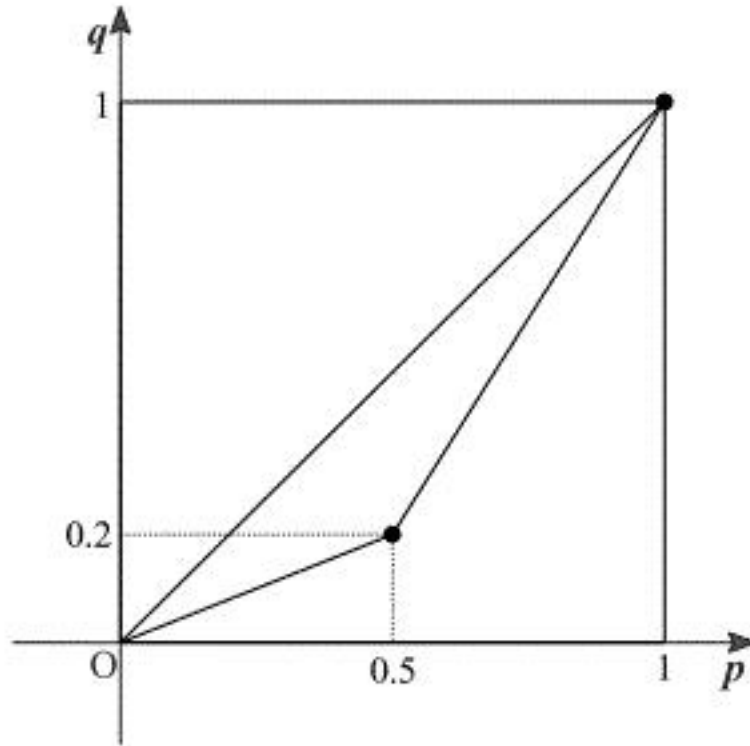
となる。分配 B のローレンツ曲線は下図のようになる。



よって，分配 B の集中面積は

$$\begin{aligned}\lambda_B &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \\ &= 0.25\end{aligned}$$

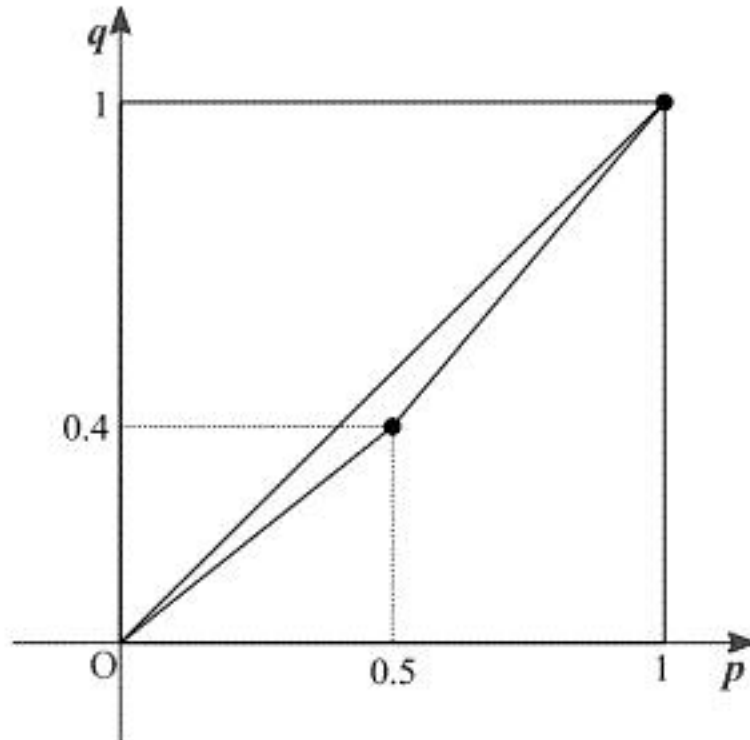
となる。分配 C のローレンツ曲線は下図のようになる。



よって，分配 C の集中面積は

$$\begin{aligned}\lambda_C &= 2 \left\{ \frac{1}{2} (0.5 - 0.2) \cdot 0.5 \right\} \\ &= 0.15\end{aligned}$$

となる。分配 D のローレンツ曲線は下図のようになる。



よって，分配 D の集中面積は

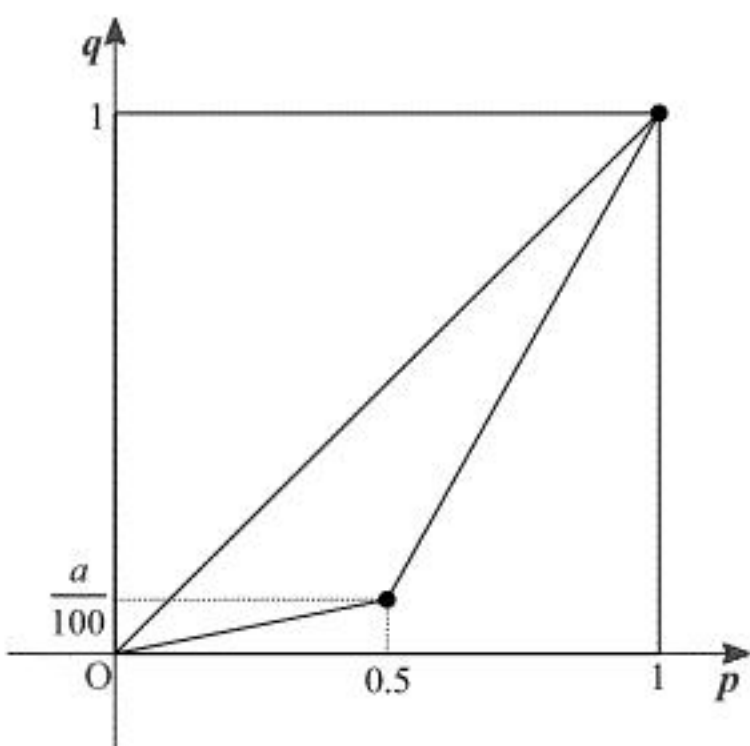
$$\begin{aligned}\lambda_D &= 2 \left\{ \frac{1}{2} (0.5 - 0.4) \cdot 0.5 \right\} \\ &= 0.05\end{aligned}$$

となる。分配 C, D のジニ係数をそれぞれ G_C, G_D とおくと

$$\begin{aligned}G_C &= 2\lambda_C \\ &= 2 \cdot 0.15 \\ &= 0.3 \\ G_D &= 2\lambda_D \\ &= 2 \cdot 0.05 \\ &= 0.1\end{aligned}$$

となる。 $G_C > G_D$ であるから，分配 C と分配 D のうち，より不均等な分配は分配 C である。

また， $x_1 = a$ (万円) ($0 \leq a \leq 50$) としたときのローレンツ曲線は下図のようになる。



集中面積を λ_a とおくと

$$\begin{aligned}\lambda_a &= 2 \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{100} \right) \cdot \frac{1}{2} \right\} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{a}{200}\end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}2\lambda_a &= 0.4 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{a}{100} &= \frac{4}{10} \\ \Leftrightarrow 50 - a &= 40 \\ \therefore a &= 10\end{aligned}$$

となるから，ジニ係数が 0.4 となるのは， $x_1 = 10$ (万円) のときである。

Ⅲ

[1]

$d(x)$ に $f(x)$, $g(x)$ を代入すると

$$\begin{aligned}d(x) &= g(x) - f(x) \\&= f(x+a) - 2a - f(x) \\&= (x+a)^3 - (x+a) - 2a - (x^3 - x) \\&= 3ax^2 + 3a^2x + a^3 - 3a\end{aligned}$$

となる。 x の方程式 $d(x)=0$ が異なる2つの実数解をもつことと x の2次方程式 $d(x)=0$ の判別式 D について $D>0$ が成り立つことは同値である。また $a<0$ であるから

$$\begin{aligned}d(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 3x^2 + 3ax + a^2 - 3 &= 0\end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned}D &= (3a)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (a^2 - 3) \\&= -3a^2 + 36\end{aligned}$$

となるから、求める a の範囲は

$$\begin{aligned}D &> 0 \\ \Leftrightarrow -3a^2 + 36 &> 0 \\ \Leftrightarrow a^2 &< 12 \\ \therefore -2\sqrt{3} &< a < 0 \quad (\because a < 0)\end{aligned}$$

となる。

(答) $-2\sqrt{3} < a < 0$

[2]

[1] より

$$\begin{aligned}d(x) &= 3ax^2 + 3a^2x + a^3 - 3a \\&= 3a\left(x + \frac{1}{2}a\right)^2 + \frac{1}{4}a^3 - 3a\end{aligned}$$

となるから、関数 $d(x)$ は

$$x = -\frac{1}{2}a \text{ のとき, 最大値 } \frac{1}{4}a^3 - 3a$$

をとる。

(答) $\frac{1}{4}a^3 - 3a$

[3]

[2] より, $h(a) = \frac{1}{4}a^3 - 3a$ となる。ゆえに

$$\begin{aligned}h'(a) &= \frac{3}{4}a^2 - 3 \\&= \frac{3}{4}(a-2)(a+2)\end{aligned}$$

となるから、[1] で求めた a の範囲における $h(a)$ の増減表は下のようになる。

a	...	-2	...	0
$h'(a)$	+	0	-	↘
$h(a)$	↗	極大	↘	↘

よって、 $h(a)$ は $a=-2$ のとき極大となる。極大値は

$$\begin{aligned}h(-2) &= \frac{1}{4}(-2)^3 - 3(-2) \\&= 4\end{aligned}$$

である。増減表から、 $h(a)$ が最大値をとるのは $a=-2$ のときであるから、求める最大値は4となる。

(答) 4

[4]

$a = -\sqrt{3}$ のとき

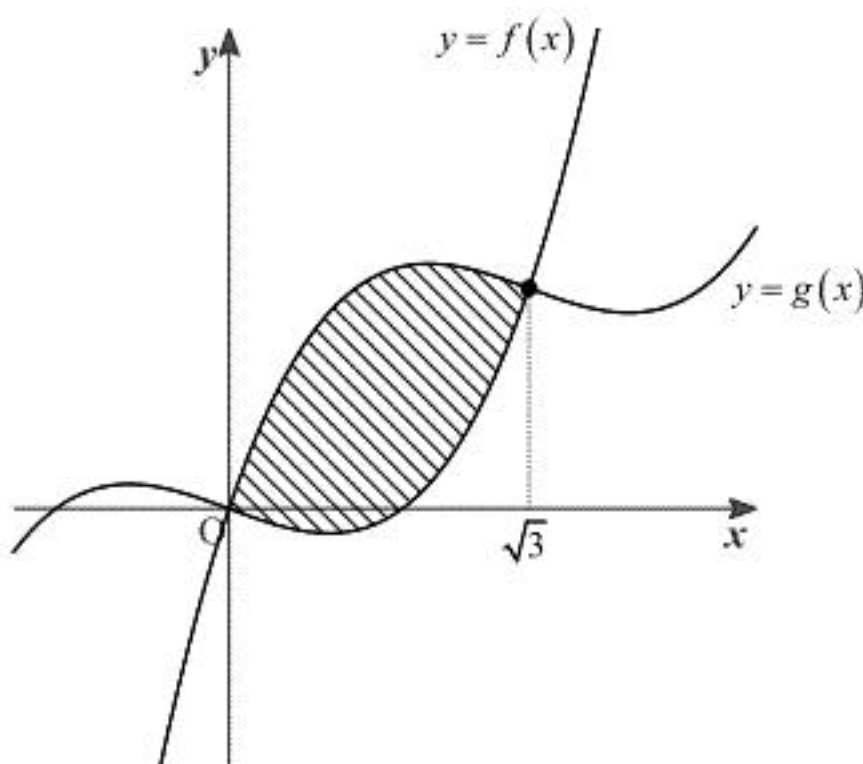
$$\begin{aligned}d(x) &= 3(-\sqrt{3})x^2 + 3(-\sqrt{3})^2x + (-\sqrt{3})^3 - 3(-\sqrt{3}) \\&= -3\sqrt{3}x^2 + 9x \\&= 3\sqrt{3}x(\sqrt{3} - x)\end{aligned}$$

となる。ゆえに

$$x < 0, \sqrt{3} < x \text{ のとき, } d(x) < 0 \text{ ,すなわち } f(x) > g(x)$$

$$0 < x < \sqrt{3} \text{ のとき, } d(x) > 0 \text{ ,すなわち } f(x) < g(x)$$

が成り立つ。よって、曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=g(x)$ で囲まれた部分は下図の斜線部分となる。



したがって、求める面積 S は

$$\begin{aligned}S &= \int_0^{\sqrt{3}} d(x) dx \\&= \int_0^{\sqrt{3}} (9x - 3\sqrt{3}x^2) dx \\&= \left[\frac{9}{2}x^2 - \sqrt{3}x^3 \right]_0^{\sqrt{3}} \\&= \frac{27}{2} - 9 \\&= \frac{9}{2}\end{aligned}$$

となる。

(答) $S = \frac{9}{2}$