

(第3時限：100分)

2016年度 ②

数 学 問 題

(理 系)

(全4ページ)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 問題文の にあてはまる適当なものを、解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
3. 解答用紙1枚・下書用紙2枚は、この冊子の中に折り込んであります。
4. 試験終了後、問題冊子・下書用紙は持ち帰りなさい。

数 学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの設問について問題文の にあてはまる適当なものを、
解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

Ⅰ 2つの円 $x^2 + y^2 = 1$ と $(x - t)^2 + (y - a)^2 = 1$ を考える。ただし、 a は
 $1 < a < 2$ を満たす実数とし、 t は実数の範囲で動くものとする。

このとき、この2つの円が共有点をもつための必要十分条件は、 t が

$$\boxed{\text{ア}} \leq t \leq \boxed{\text{イ}}$$

の範囲にあることである。

まず、共有点が1つだけの場合、その共有点の座標と、その点で2つの円の両方に接する接線の方程式は、

$$\left(\boxed{\text{ウ}}, \boxed{\text{エ}} \right) \text{ と } y = \boxed{\text{オ}}x + \boxed{\text{カ}}$$

であるか、

$$\left(\boxed{\text{キ}}, \boxed{\text{ク}} \right) \text{ と } y = \boxed{\text{ケ}}x + \boxed{\text{コ}}$$

である。

次に、2つの円が異なる2つの共有点をもつ場合、 t の動く範囲は であり、このとき、共有点の y 座標は、

$$y_1 = \frac{a}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\boxed{\text{シ}}}{a^2 + t^2} t^2 - \boxed{\text{ス}} t^2}$$

または、

$$y_2 = \frac{a}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\boxed{\text{シ}}}{a^2 + t^2} t^2 - \boxed{\text{ス}} t^2}$$

と書ける。このとき、 y_2 の最小値は となる。

(注： ア ～ サ および セ は a の式、 シ , ス は数である。)

II

- [1] a, b を正の数, e を自然対数の底とする。2つの曲線 $C_1: y = ae^x$ と $C_2: y = bx^2$ が, ある共有点で共通の接線 l_1 をもつ。このとき a を b を用いて表すと, $a = \boxed{\text{ソ}}$ となる。 C_1 と C_2 の接点の座標を b を用いて表すと $(\boxed{\text{タ}}, \boxed{\text{チ}})$ となり, 接線 l_1 の方程式を b を用いて表すと

$$y = \boxed{\text{ツ}}x + \boxed{\text{テ}}$$

となる。接線 l_1 は, b の値にかかわらず, 常に点 $(\boxed{\text{ト}}, \boxed{\text{ナ}})$ を通る。曲線 C_1 と接線 l_1 および y 軸で囲まれる図形の面積を S_1 , 曲線 C_2 と接線 l_1 および y 軸で囲まれる図形の面積を S_2 とする。 S_1 と S_2 を b を用いて表すと, $S_1 = \boxed{\text{ニ}}$, $S_2 = \boxed{\text{ヌ}}$ となり, $\frac{S_1}{S_2}$ は a, b の値にかかわらず一定となる。

- [2] c, d を正の数とする。2つの曲線 $C_3: y = \log \frac{x}{c}$ と $C_4: x = dy^2$ が, ある共有点で共通の接線 l_2 をもつ。このとき c を d を用いて表すと, $c = \boxed{\text{ネ}}$ となる。 C_3 と C_4 の接点の座標を d を用いて表すと $(\boxed{\text{ノ}}, \boxed{\text{ハ}})$ となる。接線 l_2 は, d の値にかかわらず, 常に点 $(\boxed{\text{ヒ}}, \boxed{\text{フ}})$ を通る。

Ⅲ 2つの数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が与えられたとし、特に b_n は自然数とする。このとき、新しい数列 $\{c_n\}$ を $c_n = a_{b_n}$ ($n = 1, 2, \dots$) のように定める。すなわち、数列 $\{a_n\}$ の第 b_n 番目の項を c_n と定める。

[1] $a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = 2^n$ のとき, $c_1 = \frac{1}{4}$, $c_2 = \frac{1}{16}$, $\dots$, $c_n = \boxed{\text{ヘ}}$ であり, 数列 $\{c_n\}$ の第1項から第 n 項までの和は $\boxed{\text{ホ}}$ である。

[2] $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$ のとき, $c_1 = 1$, $c_2 = \frac{1}{3}$, $\dots$, $c_n = \boxed{\text{マ}}$ であり, 数列 $\{c_n\}$ の第1項から第 n 項までの和は $\boxed{\text{ミ}}$ である。

[3] $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$, そして b_m を a_n が m 以上になる最小の n とする。このとき, $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_3 = 2$, $\dots$, $b_{\frac{n(n+1)}{2}} = \boxed{\text{ム}}$ であり, $c_1 = 1$,

$c_2 = 3$, $c_3 = 3$, $\dots$, $c_{\frac{n(n+1)}{2}+1} = \boxed{\text{メ}}$ である。数列 $\{b_n\}$ の第1項から第 $\frac{n(n+1)}{2}$ 項までの和は $\boxed{\text{モ}}$ である。また, 数列 $\{c_n\}$ の第1項から第

$\frac{n(n+1)}{2}$ 項までの和は $\boxed{\text{ヤ}}$ である。

(注: $\boxed{\text{ヘ}} \sim \boxed{\text{ヤ}}$ は, いずれも n の式である。)

IV

- [1] 1個のサイコロを2回続けて投げるとき、1回目に出た目より2回目に出た目のほうが大きいか、または等しい確率は である。また、1回目に出た目よりも2回目に出た目のほうが大きいか、または等しいことがわかっているとき、2回目に出た目が1回目に出た目で割り切れる確率は である。
- [2] 次に、1個のサイコロを n 回続けて投げの場合を考える。 n 回目に初めて1の目が出る確率は である。また、 n 回目までに少なくとも1回は1の目が出る確率は である。
- [3] 1個のサイコロをくり返し投げ、1と6の両方の目が少なくとも1回出た時点で終わるというゲームを考える。このゲームが n 回目(ただし、 $n \geq 2$)で終わる確率を求めよう。 k 回目に1の目または6の目が初めて出て、その後で、もう一方の目が n 回目に初めて出るという確率は、 n と k を使って となる。このゲームが n 回目で終わるとき、 k のとりうる範囲は $\leq k \leq$ であり、この範囲で の和をとると、求める確率は n を使って と書ける。

