

(第3時限：100分)

2016年度 ③

数 学 問 題

(理 系)

(全4ページ)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 問題文の にあてはまる適当なものを、解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
3. 解答用紙1枚・下書用紙2枚は、この冊子の中に折り込んであります。
4. 試験終了後、問題冊子・下書用紙は持ち帰りなさい。

数 学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの設問について問題文の にあてはまる適当なものを、
解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

Ⅰ 空間において、点 $A(0, 6, 0)$ を中心とする半径 3 の球面 S_1 上を動く点 Q を考える。さらに、原点を O として、線分 OQ の中点を P とする。

〔1〕 点 A, Q, P の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}, \vec{q}, \vec{p}$ とする。このとき、 $\vec{q}$ はベクトル方程式 $|\vec{q} - \text{ア} \vec{a}| = \text{イ}$ を満たす。また、 $\vec{q}$ は $\vec{p}$ を用いて $\vec{q} = \text{ウ} \vec{p}$ と表せる。したがって、 $\vec{p}$ はベクトル方程式 $|\vec{p} - \text{エ} \vec{a}| = \text{オ}$ を満たす。ゆえに、点 P は半径 カ，中心の座標 キ の球面上を動く。この球面を S_2 とする。

〔2〕 球面 S_1 上の点の座標を (x, y, z) とすると、 x, y, z は方程式 ク を満たす。同様に、球面 S_2 上の点 (x, y, z) は方程式 ケ を満たす。そこで、2つの球面 S_1 と S_2 が交わってできる円を C_1 とするとき、円 C_1 を含む平面の方程式は コ となる。このとき、円 C_1 の中心の座標は サ であり、半径は シ である。さらに、点 $U(0, -1, 0)$ に対し、線分 UQ の中点を V とする。点 Q が球面 S_1 上を動くときの点 V の軌跡は球面となる。この球面を S_3 とすると、2つの球面 S_1 と S_3 が交わってできる円 C_2 の中心の座標は ス であり、半径は セ である。

II 実数 t に関する関数 $f(t) = ae^{ct} + b$ を考える。ここで、 a, b, c を実数とし、 $a \neq 0$ とする。また、 e は自然対数の底とする。

[1] 関数 $f(t)$ が、 $f(0) = 0$ 、 $t > 0$ で $f'(t) + 2f(t) = 5$ を満たすとする

$a = \boxed{\text{ソ}}$ 、 $b = \boxed{\text{タ}}$ 、 $c = \boxed{\text{チ}}$ である。

[2] 実数 x に対し、関数 $f(t)$ が、 $f(0) = x$ 、 $t > 0$ で $f'(t) + 2f(t) = 5$ を満

たすとする、 $f(1) = \boxed{\text{ツ}}$ であり、 $\int_0^1 f(t)dt = \boxed{\text{テ}}$ となる。

[3] 実数 y に対し、関数 $f(t)$ が、 $f(0) = y$ 、 $t > 0$ で $f'(t) + 2f(t) = 0$ を満

たすとする、 $f(1) = \boxed{\text{ト}}$ であり、 $\int_0^1 f(t)dt = \boxed{\text{ナ}}$ となる。

[4] $g(x) = \boxed{\text{ツ}}$ 、 $h(y) = \boxed{\text{ト}}$ として、

$$d_1 = 0, d_{n+1} = h(g(d_n))$$

で与えられる数列 $\{d_n\}$ を考えると、 $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \boxed{\text{ニ}}$ となる。

Ⅲ 以下 α は複素数 $1 + 2i$ を表す。

[1] α の偏角を θ (ただし, $0 \leq \theta < 2\pi$) とする。 α が表す点は第 象限にあるので,

$$\left(\text{} - 1 \right) \frac{\pi}{2} < \theta < \text{} \frac{\pi}{2}$$

である。また,

$$\alpha^4 = \text{} + \text{} i$$

より,

$$\left(\text{} - 1 \right) \frac{\pi}{2} < 4\theta < \text{} \frac{\pi}{2}$$

である。 α^{16} の実部の符号は , 虚部の符号は なので,

$$\left(\text{} - 1 \right) \frac{\pi}{2} < 16\theta < \text{} \frac{\pi}{2}$$

である。この不等式を使うと, $m\theta > 20\pi$ を満たす最小の自然数 m について不等式

$$\text{} \leq m \leq \text{} + 5$$

が成り立つことがわかる。

(注: , , , は自然数である。)

[2] 0 以上の整数 n について複素数平面上で複素数 α^n を表す点を $P_n(\alpha^n)$ と書く。線分 P_0P_1 の長さは 2 であり, 線分 P_1P_2 と線分 P_2P_3 の長さはそれぞれ , , 線分 P_nP_{n+1} の長さは である。また, 原点を O としたとき, 三角形 OP_nP_{n+1} の面積は である。

IV 最初に1から6までのトランプのカード6枚を、表を上にして一列に並べる。

そして、サイコロを振り、出た目に対して、その出た目の数のトランプのカードを裏返す、という試行を繰り返す。例えば、3回この試行を繰り返し、サイコロの出た目が順に1, 3, 1であったとすれば、裏が上になっているのは3のカードだけである。

以下では、 m 回目の試行後に裏が上になっているトランプのカードが k 枚である確率を $p_{m,k}$ と表すことにする。 m は自然数で、 k は0から6までの整数である。

[1] $p_{1,1} = 1$ であり、 $p_{2,0} = \boxed{\text{モ}}$, $p_{2,1} = 0$, $p_{2,2} = \boxed{\text{ヤ}}$ である。また、2回目の試行後に裏が上になっているカードが0枚であるとき、4回目の試行後に裏が上になっているカードが2枚である確率は $\boxed{\text{ユ}}$ である。一方、2回目の試行後に裏が上になっているカードが2枚であるとき、4回目の試行後に裏が上になっているカードが2枚である確率は $\frac{11}{18}$ である。

[2] $p_{4,0} = \boxed{\text{ヨ}}$, $p_{4,2} = \boxed{\text{ラ}}$, $p_{4,4} = \boxed{\text{リ}}$ である。

[3] m 回目の試行後に裏が上になっているカードが k 枚である場合に、 $m+2$ 回目の試行後にも裏が上になっているカードが k 枚である確率は、 $k=0$ または $k=6$ のとき $\boxed{\text{ル}}$ であり、それ以外のとき、 k を使って $\boxed{\text{レ}}$ と書ける。

