

I

〔解答〕

ア	$\frac{p+q}{2}$	イ	$\frac{p-q}{2}$	ウ	2
エ	2π	オ	t^2+t-2	カ	2
キ	0	ク	4	ケ	$\frac{5}{432}$
コ	$\frac{7}{72}$	サ	$\frac{1}{36}$	シ	$\frac{175}{1296}$

〔解説〕

〔1〕

$$\begin{aligned}p &= x+y, q = x-y \text{ とおくと,} \\p+q &= 2x, p-q = 2y \\ \Leftrightarrow x &= \frac{p+q}{2}, y = \frac{p-q}{2}\end{aligned}$$

である。よって、

$$x^2+y^2=\left(\frac{p+q}{2}\right)^2+\left(\frac{p-q}{2}\right)^2=\frac{1}{2}(p^2+q^2)$$

より、点 (x, y) が円 $x^2+y^2=1$ の周と内部を動くという条件は、

$$\begin{aligned}x^2+y^2 &\leq 1 \\ \Leftrightarrow p^2+q^2 &\leq 2\end{aligned}$$

と表せる。したがって、点 $(x+y, x-y)$ は原点を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円の周と内部を動き、その範囲の面積は、

$$\pi(\sqrt{2})^2=2\pi$$

である。

〔2〕

$$\begin{aligned}t^2 &= 4^x+4^{-x}+2 \text{ より,} \\ y &= t^2+t-2 \\ &= \left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\end{aligned}$$

となる。ここで、 t のとりうる値の範囲は、相加相乗平均の関係より

$$\begin{aligned}&\geq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}} \\ &= 2\end{aligned}$$

である。このとき、等号成立条件は

$$\begin{aligned}2^x &= 2^{-x} \\ \Leftrightarrow 4^x &= 1 \\ \Leftrightarrow x &= 0\end{aligned}$$

である。したがって、 y は $t=2$ すなわち $x=0$ のとき最小値 4 をとる。

〔3〕 (a)

$a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ となるとき、 (a_1, a_2, a_3, a_4) の組み合わせと、1 から 6 の数字から 4 つの数字を選ぶ組み合わせは等しいので、その場合の数は

$${}_6C_4=15$$

通りである。したがって、この場合の確率は、

$$\frac{15}{6^4}=\frac{5}{432}$$

である。また、 $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$ となるとき、場合分けをして考える。

〔1〕 出る目が 4 種類のとき

上の議論より 15 通りである。

〔2〕 出る目が 3 種類のとき

このときの場合の数は、

$${}_6C_3\cdot 3=60$$

通りである。

〔3〕 出る目が 2 種類のとき

このときの場合の数は、

$${}_6C_2\cdot 3=45$$

通りである。

〔4〕 出る目が 1 種類のとき

このときの場合の数は、1 から 6 の 6 通りである。

以上〔1〕,〔2〕,〔3〕,〔4〕より、求める確率は

$$\frac{15+60+45+6}{6^4}=\frac{7}{72}$$

である。

(b)

さいころを 2 回投げて和が 7 になるのは

$$(1, 6), (2, 5), (3, 4)$$

の組み合わせであるから、 $(a_1, a_2), (a_3, a_4)$ の組み合わせはそれぞれ 6 通りである。したがって、 $a_1+a_2=a_3+a_4=7$ となる確率は

$$\left(\frac{6}{6^2}\right)^2=\frac{1}{36}$$

である。

(c)

出る目の数がすべて 4 以下である確率から、出る目の数がすべて 3 以下である確率を除けばよいから、求める確率は

$$\frac{4^4-3^4}{6^4}=\frac{175}{1296}$$

である。

II

〔解答〕

ア	510	イ	610	ウ	200
エ	$\frac{500}{61}$	オ	5500	カ	61

〔解説〕

〔1〕

年利率 2% のとき、500 万円を預金した 1 年後には

$$500 \cdot 1.02 = 510$$

万円となる。よって、10 年後の総預金額は

$$\begin{aligned} 500 \cdot 1.02^{10} &= 500 \cdot 1.22 \\ &= 610 \end{aligned}$$

万円である。

〔2〕

5 年後に 220 万円得るためには、

$$X \cdot 1.02^5 = 220$$

$$\therefore X = 200$$

万円を預金すればよい。

〔3〕

株式 1 単位あたり毎年 10 万円の配当がある場合、1 単位持っていたとき、10 年後に得られる配当の割引現在価値は

$$\frac{10}{1.02^{10}} = \frac{10}{1.22} = \frac{500}{61}$$

万円である。したがって、購入から 10 年後まで毎年配当が得られるとしたとき、この株式 1 単位の割引現在価値は、毎年受け取る配当の割引現在価値の総和に等しく、

$$\begin{aligned} 10 \cdot 1.02^{-1} + 10 \cdot 1.02^{-2} + \cdots + 10 \cdot 1.02^{-10} &= 10 \cdot 1.02^{-1} \sum_{k=1}^{10} 1.02^{-(k-1)} \\ &= 10 \cdot 1.02^{-1} \cdot \frac{1 - 1.02^{-10}}{1 - 1.02^{-1}} \\ &= 10 \cdot \frac{1 - 1.02^{-10}}{1.02 - 1} \\ &= 500 \cdot \left(1 - \frac{1}{1.02^{10}} \right) \\ &= 500 \cdot \frac{1.02^{10} - 1}{1.02^{10}} \\ &= 500 \cdot \frac{0.22}{1.22} \\ &= \frac{110}{1.22} \\ &= \frac{5500}{61} \end{aligned}$$

万円である。

Ⅲ

[1]

$$f(x) = x^2 + 1, g(x) = -x^2 + ax + b$$

とすると,

$$f'(x) = 2x, g'(x) = -2x + a$$

である。よって, $y = f(x), y = g(x)$ が $x = p$ で接するための必要十分条件は,

$$\begin{cases} f(p) = g(p) \\ f'(p) = g'(p) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} p^2 + 1 = -p^2 + ap + b \\ 2p = -2p + a \end{cases} \\ \therefore \begin{cases} a = 4p \\ b = -2p^2 + 1 \end{cases}$$

である。

$$(答) \quad a = 4p, b = -2p^2 + 1$$

[2]

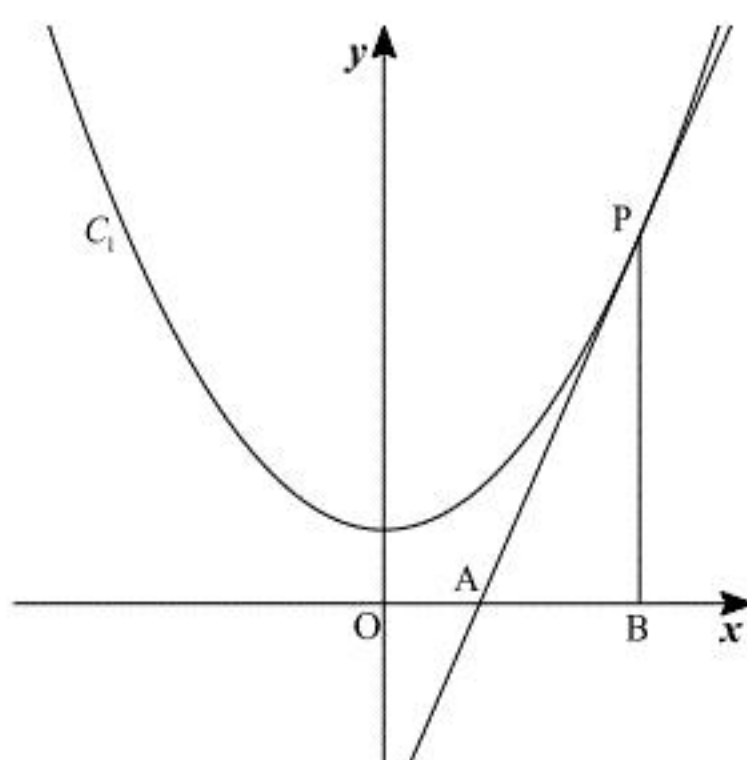
点 P における放物線 C_1 の接線の方程式は,

$$\begin{aligned} y &= f'(p)(x - p) + f(p) \\ &= 2p(x - p) + p^2 + 1 \\ &= 2px - p^2 + 1 \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad y = 2px - p^2 + 1$$

[3]



点 A は接線と x 軸の交点であるから, その x 座標は

$$\begin{aligned} 0 &= 2px - p^2 + 1 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{p^2 - 1}{2p} \quad (\because p \neq 0) \end{aligned}$$

となり, 点 A の座標は $\left(\frac{p^2 - 1}{2p}, 0\right)$ となる。よって,

$$\begin{aligned} AB &= \left| p - \frac{p^2 - 1}{2p} \right| = \frac{p^2 + 1}{2|p|} \\ PB &= p^2 + 1 \end{aligned}$$

となる。したがって, 求める $\triangle PAB$ の面積は,

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{p^2 + 1}{2|p|} \cdot (p^2 + 1) = \frac{(p^2 + 1)^2}{4|p|}$$

となる。

$$(答) \quad \frac{(p^2 + 1)^2}{4|p|}$$

[4]

$y = -x^2 + 4px - 2p^2 + 1, y = x^2$ を連立させて,

$$\begin{aligned} 2x^2 - 4px + 2p^2 - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= p \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

となる。よって, 2つの放物線によって囲まれる面積は,

$$\begin{aligned} \int_{p - \frac{\sqrt{2}}{2}}^{p + \frac{\sqrt{2}}{2}} \{(-x^2 + 4px - 2p^2 + 1) - x^2\} dx &= -2 \int_{p - \frac{\sqrt{2}}{2}}^{p + \frac{\sqrt{2}}{2}} \left(x - p + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(x - p - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) dx \\ &= \frac{-(-2)}{6} (\sqrt{2})^3 \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

となり, 確かに p の値によらず一定である。

(証明終)