

【解答】

	ア	イ	ウ	エ	オ	
[1]	$\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$	$2tx - t^2$	$2x - 1$	$(2, 3)$	$\frac{1}{12}$	
	カ	キ	ク	ケ	コ	サ
[2]	1	$\frac{1}{2} \leq x < 1$	$1 \leq x < \frac{3}{2}$	$\frac{k+1}{2} \leq x < \frac{k+2}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
	シ	ス	セ	ソ		
[3]	A	C	A	± 1		

【解説】

[1] (a)

$$y = x^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$y = x^2 - 2x + 3 \quad \dots \textcircled{2}$$

から y を消去することで、

$$x^2 = x^2 - 2x + 3$$

$$\Leftrightarrow -2x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

となる。このとき、①より

$$y = \frac{9}{4}$$

であるから、放物線の交点は $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$ となる。

(b)

$$f(x) = x^2 \text{ とすると、}$$

$$f'(x) = 2x$$

であるから、放物線①上の点 (t, t^2) における接線は、

$$y = f'(t)(x - t) + f(t)$$

$$= 2tx - t^2$$

となる。

(c)

(b)で求めた接線が②に接するための条件を考える。接線の方程式と②の方程式から y を消去することで、

$$x^2 - 2x + 3 = 2tx - t^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2(1+t)x + 3 + t^2 = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

となり、この2次方程式の判別式を D とおくと

$$\frac{D}{4} = (t+1)^2 - (t^2 + 3) = 2t - 2$$

となる。したがって、(b)で求めた放物線①の接線と放物線②が接するための条件は、

$$D = 0 \Leftrightarrow 2t - 2 = 0$$

$$\therefore t = 1$$

であるから、放物線①と②に共通な接線の方程式は

$$y = 2x - 1$$

である。また、この接線と放物線②との接点の座標は

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 3 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$

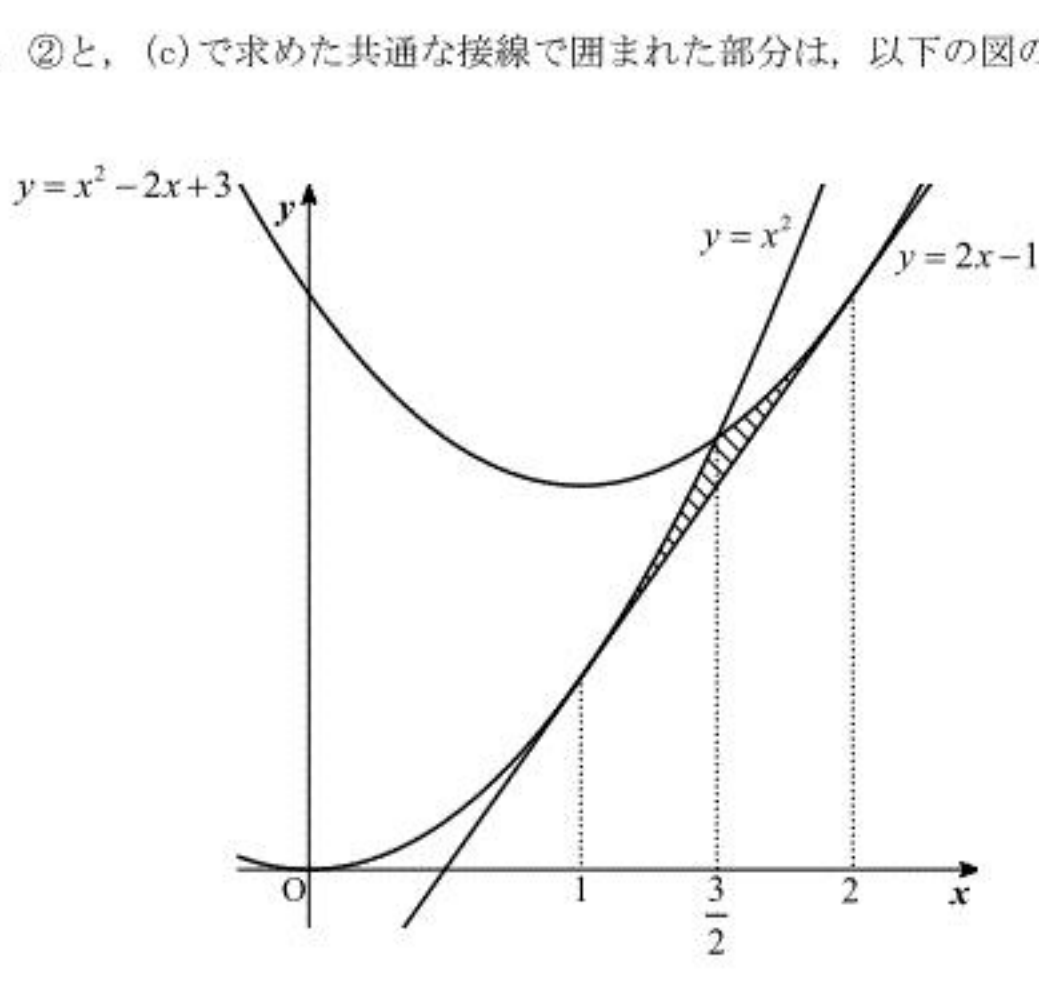
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 = 0 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$

$$\therefore (x, y) = (2, 3)$$

となる。

(d)

放物線①、②と、(c)で求めた共通な接線で囲まれた部分は、以下の図の斜線部である。



図より、求める面積は、

$$\begin{aligned} \int_1^{\frac{3}{2}} \{x^2 - (2x - 1)\} dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 \{(x^2 - 2x + 3) - (2x - 1)\} dx &= \int_1^{\frac{3}{2}} (x-1)^2 dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 (x-2)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x-1)^3 \right]_1^{\frac{3}{2}} + \left[\frac{1}{3}(x-2)^3 \right]_{\frac{3}{2}}^2 \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

と計算できる。

[2]

 $2 < \sqrt{5} < 3$ より、 $1 < \sqrt{5} - 1 < 2$ であるから、

$$[\sqrt{5} - 1] = 1$$

である。また、 $[2x - 1] = 0$ のとき、

$$0 \leq 2x - 1 < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x < 1$$

が成り立ち、 $[2x - 1] = 1$ のとき、

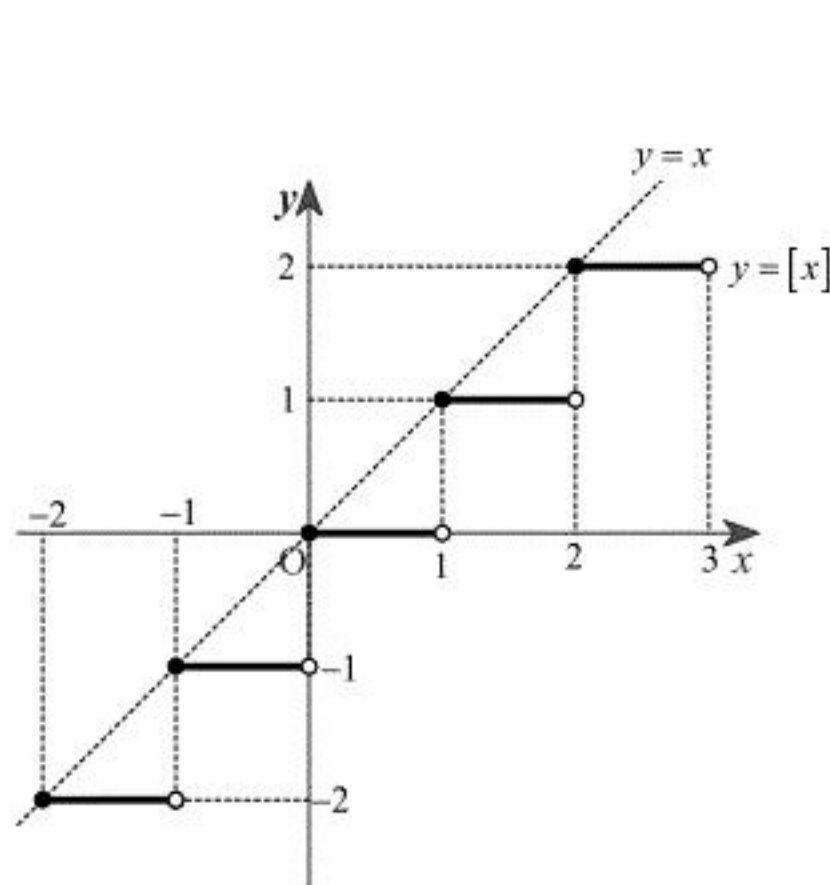
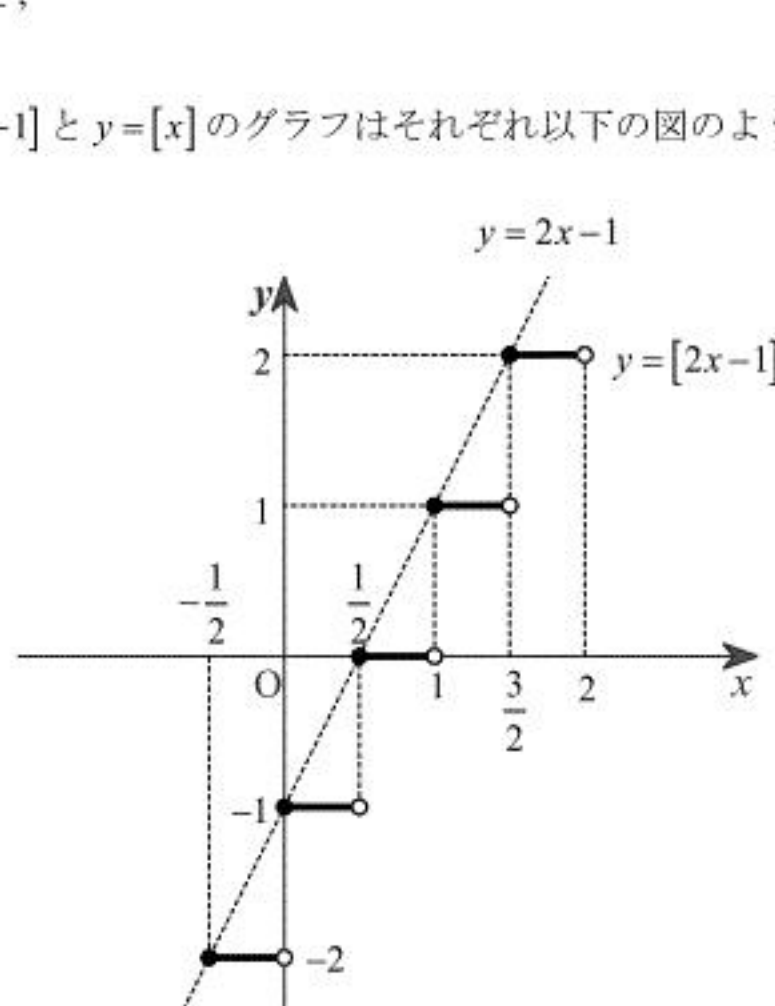
$$1 \leq 2x - 1 < 2 \Leftrightarrow 1 \leq x < \frac{3}{2}$$

が成り立つ。同様にして、 $[2x - 1] = k$ のとき、

$$k \leq 2x - 1 < k + 1 \Leftrightarrow \frac{k+1}{2} \leq x < \frac{k+2}{2}$$

であり、 $[x] = k$ のとき、

$$k \leq x < k + 1$$

であるから、 $y = [2x - 1]$ と $y = [x]$ のグラフはそれぞれ以下の図のようになる。

2つのグラフの共通部分を考えることで、

$$[2x - 1] = [x]$$

を満たす x の範囲は、

$$\frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{2}$$

と分かる。

[3] (a)

方程式 $|x+3| + |x-2| = -x^2 + 6$ について、 x の範囲で場合分けをする。[1] $x < -3$ のとき

$$-(x+3) - (x-2) = -x^2 + 6$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \pm 2\sqrt{2}$$

となるが、これらは $x < -3$ を満たさないから、方程式 $|x+3| + |x-2| = -x^2 + 6$ はこの範囲で実数解を持たない。[2] $-3 \leq x < 2$ のとき

$$(x+3) - (x-2) = -x^2 + 6$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 1$$

となり、これらは $-3 \leq x < 2$ を満たすから、方程式 $|x+3| + |x-2| = -x^2 + 6$ はこの範囲で2個の実数解を持つ。[3] $2 \leq x$ のとき

$$(x+3) + (x-2) = -x^2 + 6$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{6}$$

となるが、これらは $2 \leq x$ を満たさないから、方程式 $|x+3| + |x-2| = -x^2 + 6$ はこの範囲で実数解を持たない。以上、[1], [2], [3]より、方程式 $|x+3| + |x-2| = -x^2 + 6$ は、 $x < -3$ の範囲では、実数解を持たない $-3 \leq x < 2$ の範囲では、2個の実数解を持つ $2 \leq x$ の範囲では、実数解を持たない

ことが分かる。

(b)

(a)の結果より、方程式①の解を求めると、

$$x = \pm 1$$

である。

II

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ
$\frac{a^2}{2}$	$\frac{a^2}{4}$	$\frac{a^2}{4}-T$	6	$2 \leq b \leq 6$

〔解説〕

〔1〕

満足度 U_A は

$$U_A = -\frac{1}{a^2} \left(Y_A - \frac{a^2}{2} \right)^2 + \frac{a^2}{4}$$

と変形できるので、満足度を最大にするような日給 Y_A は $\frac{a^2}{2}$ であり、その時の満足度は $\frac{a^2}{4}$ である。

〔2〕

$\bar{Y}$ の範囲は $0 < \bar{Y} \leq \frac{a^2}{2}$ であるが、 $\bar{Y} = \frac{a^2}{2}$ のときは $Y_A = \bar{Y}$ として補助金を受け取る場合が最も満足度が大きくなる。したがって、 $Y_A > \bar{Y}$ のとき $\bar{Y} \neq \frac{a^2}{2}$ であり、満足度 U_A は

$$U_A = -\frac{1}{a^2} \left(Y_A - \frac{a^2}{2} \right)^2 + \frac{a^2}{4} - T$$

と表せるので、 U_A は $Y_A = \frac{a^2}{2}$ のときに最大値 $\frac{a^2}{4} - T$ をとる。また、補助金を受け取る場合の満足度 U_A は $Y_A \leq \bar{Y} \leq \frac{a^2}{2}$ において単調に増加するので、補助金を受け取る場合の満足度の最大値は、

$$U_A = \bar{Y} + T - \left(\frac{\bar{Y}}{a} \right)^2$$

である。いま、 $a=6, T=2$ とすると、政府が個人 A から税金を徴収するためには

$$0 < \bar{Y} \leq \frac{a^2}{2} \text{ かつ } \frac{a^2}{4} - T \geq \bar{Y} + T - \left(\frac{\bar{Y}}{a} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow 0 < \bar{Y} \leq 18 \text{ かつ } \bar{Y}^2 - 36\bar{Y} + 180 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 < \bar{Y} \leq 18 \text{ かつ } (\bar{Y} - 6)(\bar{Y} - 30) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 < \bar{Y} \leq 6$$

の範囲に $\bar{Y}$ を設定する必要がある。

〔3〕

個人 B が税金を支払う、すなわち $Y_B > \bar{Y}$ のとき最大の満足度 U_B は

$$\frac{b^2}{4} - T = \frac{b^2}{4} - 2$$

となる。個人 B が補助金を受け取る、すなわち $Y_B \leq \bar{Y}$ のとき最大の満足度 U_B は

$$\bar{Y} + T - \left(\frac{\bar{Y}}{b} \right)^2 = 8 - \frac{36}{b^2}$$

となる。個人 B は、満足度が同じ値をとるときには b_B が短くなるように、すなわち補助金を受け取るように Y_B を選択するため、個人 B が補助金を受け取ることは、

$$8 - \frac{36}{b^2} \geq \frac{b^2}{4} - 2$$

が成り立つことと同値である。従って、個人 B が補助金を受け取ることになる時間給 b の範囲は、

$$b^4 - 40b^2 + 144 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (b^2 - 4)(b^2 - 36) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 4 \leq b^2 \leq 36$$

$$\therefore 2 \leq b \leq 6 \text{ (} \because b > 0 \text{)}$$

となる。

Ⅲ

[1]

[1] 雨天の場合

1回戦ではAとB、CとDが対戦するから、Aが決勝戦に進む確率は $\frac{3}{5}$ であり、C、Dが

決勝戦に進む確率はそれぞれ $\frac{7}{10}, \frac{3}{10}$ である。また、AとC、Dの勝負において、Aが勝つ

確率はそれぞれ $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}$ である。以上より、雨天時にAが優勝する確率は

$$\frac{3}{5} \cdot \left(\frac{7}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{5} \right) = \frac{159}{500}$$

である。

[2] 晴天の場合

1回戦ではAとB、CとDが対戦するから、Aが決勝戦に進む確率は $\frac{1}{2}$ であり、C、Dが

決勝戦に進む確率はいずれも $\frac{1}{2}$ である。また、AとC、Dの勝負において、Aが勝つ確率

はそれぞれ $\frac{3}{5}, \frac{1}{2}$ である。以上より、晴天時にAが優勝する確率は

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{11}{40}$$

である。

以上[1], [2]より、雨天時および晴天時にAが優勝する確率は、それぞれ $\frac{159}{500}, \frac{11}{40}$ である。

$$\text{(答) 雨天時: } \frac{159}{500}, \text{ 晴天時: } \frac{11}{40}$$

[2]

(a)

1回戦において、AがB、C、Dと対戦する確率はいずれも $\frac{1}{3}$ である。ここで、Aの1回戦の対

戦相手で場合分けを行い、雨天時にAが優勝する確率を求める。

[1] 1回戦でAとBが対戦する場合

[1]の結果より、Aが優勝する確率は $\frac{159}{500}$ である。

[2] 1回戦でAとDが対戦する場合

問題文で与えられた①, ②, ④のルールは、BとDを入れ替えても成り立つ。したがって、

BとDは対称であるから、Aが優勝する確率は[1]の場合と同じく $\frac{159}{500}$ である。

[3] 1回戦でAとCが対戦する場合

1回戦ではAとC、BとDが対戦するから、Aが決勝戦に進む確率は $\frac{1}{2}$ である。決勝戦の

相手はBまたはDとなるが、いずれの場合もAが勝つ確率は $\frac{3}{5}$ である。以上より、Aが

優勝する確率は

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$

である。

以上[1], [2], [3]より、雨天時にAが優勝する確率は

$$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{159}{500} + \frac{159}{500} + \frac{3}{10} \right) = \frac{39}{125}$$

である。

$$\text{(答) } \frac{39}{125}$$

(b)

まず、(a)と同様の方法で晴天時にAが優勝する確率を求める。

[1] 1回戦でAとBが対戦する場合

[1]の結果より、Aが優勝する確率は $\frac{11}{40}$ である。

[2] 1回戦でAとDが対戦する場合

問題文で与えられた①, ②, ④のルールは、BとDを入れ替えても成り立つ。したがって、

BとDは対称であるから、Aが優勝する確率は[1]の場合と同じく $\frac{11}{40}$ である。

[3] 1回戦でAとCが対戦する場合

1回戦ではAとC、BとDが対戦するから、Aが決勝戦に進む確率は $\frac{3}{5}$ である。決勝戦の

相手はBまたはDとなるが、いずれの場合もAが勝つ確率は $\frac{1}{2}$ である。以上より、Aが

優勝する確率は

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

である。

以上[1], [2], [3]より、晴天時にAが優勝する確率は

$$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{11}{40} + \frac{11}{40} + \frac{3}{10} \right) = \frac{17}{60}$$

である。ここで、「大会の日が雨天であり、かつAが優勝する確率」は

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{39}{125}$$

であり、「大会の日が晴天であり、かつAが優勝する確率」は

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{17}{60}$$

であるから、Aが優勝する確率は

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{39}{125} + \frac{1}{2} \cdot \frac{17}{60} = \frac{1}{2} \cdot \frac{893}{1500}$$

である。したがって、「Aが優勝したとき、大会の日の天候が雨天であった確率」は

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{39}{125}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{893}{1500}} = \frac{468}{893}$$

となる。

$$\text{(答) } \frac{468}{893}$$