

I

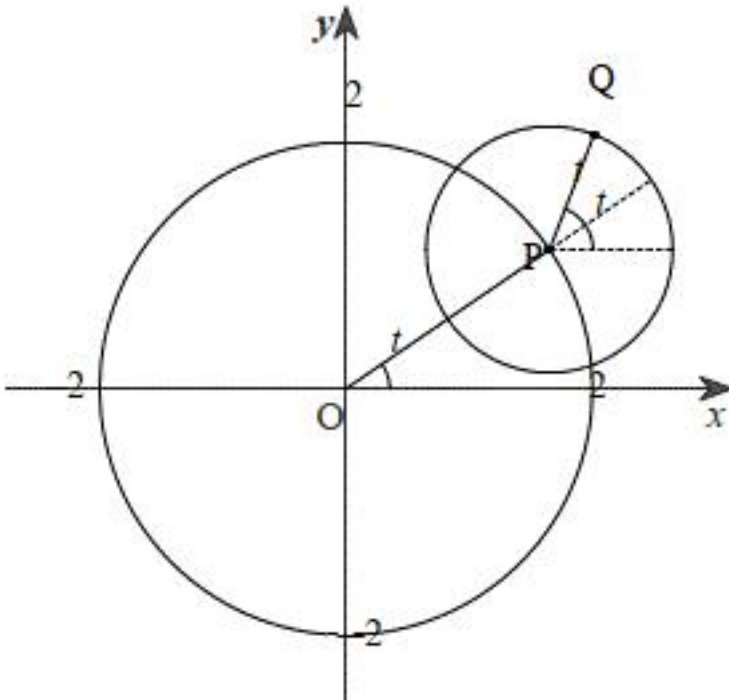
【解答】

〔1〕	ア	イ	
	$2\cos t + \cos 2t$	$2\sin t + \sin 2t$	
〔2〕	ウ	エ	オ
	-2	-2	$2\sqrt{2}$
〔3〕	カ	キ	
	$\frac{2}{3}\pi$	$-\frac{3}{2}$	
〔4〕	ク		
	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$		
〔5〕	ケ		
	3π		

【解説】

〔1〕

問題文の状況を図示すると以下のようになる。



点Qは点Pを中心とする半径1の円周上より

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP} = (2\cos t, 2\sin t) \\ \overrightarrow{PQ} = (\cos 2t, \sin 2t) \end{cases}$$

であるから

$$\overrightarrow{OQ} = (2\cos t + \cos 2t, 2\sin t + \sin 2t)$$

となる。よって求める座標は $(2\cos t + \cos 2t, 2\sin t + \sin 2t)$ (・・・アイ)である。

〔2〕

〔1〕より

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{OQ} = (-2\sin t - 2\sin 2t, 2\cos t + 2\cos 2t)$$

となるから、 $t = \frac{\pi}{2}$ のとき

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{OQ} = (-2, -2)(・・・ウエ)$$

となり、速さは

$$\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2} \text{ (・・・オ)}$$

となる。

〔3〕

〔1〕の結果より点Qのx座標は

$$\begin{aligned} x &= 2\cos t + \cos 2t \\ &= 2\cos^2 t + 2\cos t - 1 \\ &= 2\left(\cos t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

となるから、 $0 \leq t \leq \pi$ より

$$\begin{aligned} \cos t &= -\frac{1}{2} \\ \therefore t &= \frac{2}{3}\pi \text{ (・・・カ)} \end{aligned}$$

のときに最小値 $-\frac{3}{2}$ (・・・キ)をとる。

〔4〕

〔1〕の結果より点Qのy座標は

$$y = 2\sin t + \sin 2t$$

であるから、tで微分すると

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= 2\cos t + 2\cos 2t \\ &= 2\cos t + 2(2\cos^2 t - 1) \\ &= 4\cos^2 t + 2\cos t - 2 \\ &= 2(\cos t + 1)(2\cos t - 1) \end{aligned}$$

となるから、yの増減は下のようになる。

t	0	・・・	$\frac{\pi}{3}$	・・・	π
$\frac{dy}{dt}$		+	0	-	
y	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	0

よってy座標の最大値は $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (・・・ク)である。

〔5〕

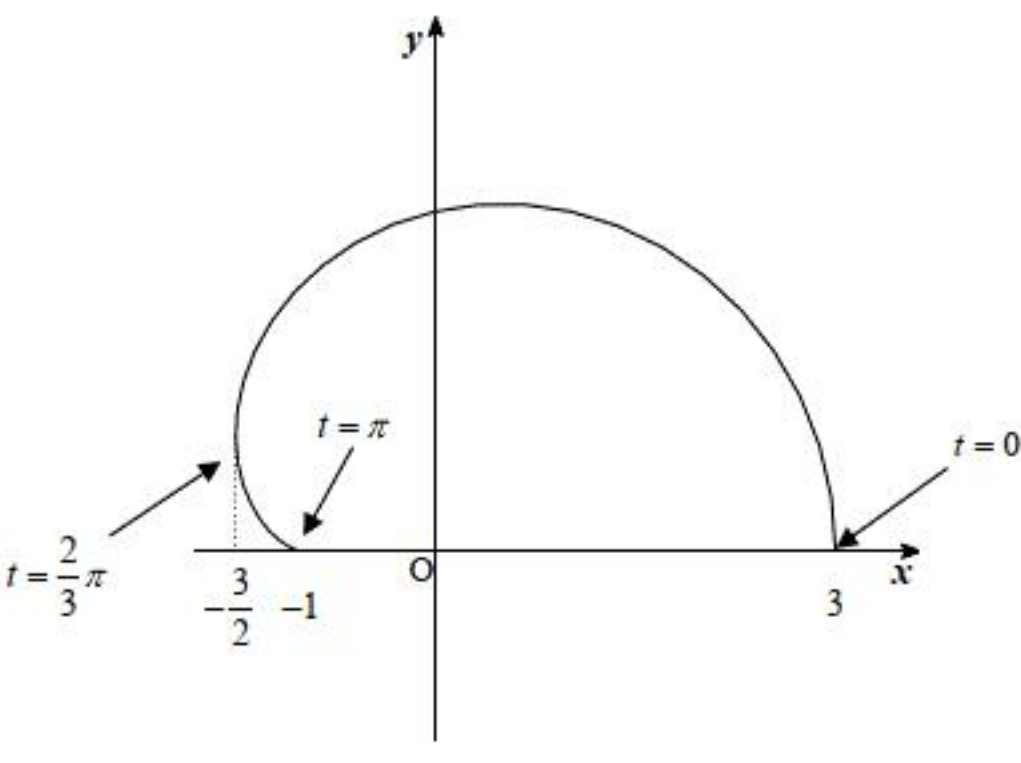
点Qのx座標について、

$$\frac{dx}{dt} = -2\sin t - 2\sin 2t = -2\sin t(1 + 2\cos t)$$

であるから、点Q(x, y)の増減表は以下のようになる。

t	0	・・・	$\frac{\pi}{3}$	・・・	$\frac{2}{3}\pi$	・・・	π
$\frac{dx}{dt}$		-	-	-	0	+	+
$\frac{dy}{dt}$		+	0	-	-	-	-
(x, y)	(3, 0)	↖	$(\frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$	↙	$(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$	↘	(-1, 0)

増減表より、点Qの軌跡は以下の図のようになる。



点Qの軌跡のうち $0 \leq t \leq \frac{2}{3}\pi$ に対応する部分を $y = f_1(x)$ 、 $\frac{2}{3}\pi \leq t \leq \pi$ に対応する部分を $y = f_2(x)$ とおくと、図より求める面積は、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{3}{2}}^3 f_1(x) dx - \int_{-\frac{3}{2}}^{-1} f_2(x) dx \\ &= \int_{\frac{2}{3}\pi}^0 f_1(x) \frac{dx}{dt} dt - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} f_2(x) \frac{dx}{dt} dt \\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{3}} -2(2\sin t + \sin 2t)(\sin t + \sin 2t) dt \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\sin^2 t + \sin^2 2t + 3\sin t \sin 2t) dt \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(1 - \cos 2t + \frac{1 - \cos 4t}{2} + 6\sin^2 t \cos t\right) dt \\ &= \left[3t - \sin 2t - \frac{1}{4}\sin 4t\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + 12\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t (\sin t)' dt \\ &= 3\pi + \left[4\sin^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= 3\pi \text{ (・・・ケ)} \end{aligned}$$

となる。

II

〔解答〕

コ	サ	シ	ス	セ	ソ
$k+2$	2	2	$k-2$	$k^{n-1}(a-b)$	k
タ	チ			ツ	
$2k^{n-2}(a-b)$		$k^{n-2}\{2(n-1)(a-b)+ka\}$		$k^{n-2}\{2(n-1)(a-b)+kb\}$	
〔1〕	テ	ト			
	1	$\frac{5}{4}\pi$			
〔2〕	ナ				
	1				

〔解説〕

$$z_n = (k+2i)z_{n-1} + 2\overline{z_{n-1}} \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1}$$

とおく。実数 x_0, y_0 を用いて $z_0 = x_0 + y_0 i$ とおくと、 $x_0 = a, y_0 = b$ であり、①より、

$$\begin{aligned}x_n + y_n i &= (k + 2i)(x_{n-1} + y_{n-1} i) + 2(x_{n-1} - y_{n-1} i) \\&= (kx_{n-1} - 2y_{n-1} + 2x_{n-1}) + (2x_{n-1} + ky_{n-1} - 2y_{n-1})i \\&= \{(k+2)x_{n-1} - 2y_{n-1}\} + \{2x_{n-1} + (k-2)y_{n-1}\}i\end{aligned}$$

となる。ここで、 $x_n, y_n, x_{n+1}, y_{n+1}, k$ は実数であるから、 $n=2, 3, \dots$ に対して

$$\begin{cases} x_n = (k+2)x_{n-1} - 2y_{n-1} (\cdots \text{コサ}) \\ y_n = 2x_{n-1} + (k-2)y_{n-1} (\cdots \text{シス}) \end{cases} \quad \cdots \textcircled{2}$$

を得る。辺々引いて、

$$x_n - y_n = kx_{n-1} - ky_{n-1} = k(x_{n-1} - y_{n-1})$$

となる。よって、数列 $\{x_n - y_n\}$ は初項 $x_1 - y_1 = a - b$ 、公比 k の等比数列であり、

$$x_n - y_n = k^{n-1}(a-b)(\dots \text{etc})$$

を得る。これを變形すると、

$$y_n = x_n - k^{n-1}(a-b) \quad \dots \textcircled{3}$$

となり、これを②に代入すると、

$$\begin{aligned} x_n &= (k+2)x_{n-1} - 2\{x_{n-1} - k^{n-2}(a-b)\} \\ &= kx_{n-1} + 2k^{n-2}(a-b) \quad (\cdots \forall \mathcal{T}) \quad (n=2, 3, \cdots) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $k \neq 0$ より、

$$\frac{x_n}{k^n} = \frac{x_{n-1}}{k^{n-1}} + \frac{2(a-b)}{k^2} \quad (n=2, 3, \dots)$$

となるから、数列 $\left\{ \frac{x_n}{k^n} \right\}$ は初項 $\frac{x_1}{k} = \frac{a}{k}$ 、公差 $\frac{2(a-b)}{k^2}$ の等差数列で、

$$\frac{x_n}{k^n} = \frac{a}{k} + \frac{2(a-b)(n-1)}{k^2}$$

$$\therefore x_n = k^{n-2} \{2(a-b)(n-1) + ka\} (\cdot \neq) \quad (n=1, 2, \dots)$$

である。また、これを③に代入すると、

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - k^{n-1}(a-b) \\ &= k^{n-2}\{2(a-b)(n-1) + ka\} - k^{n-1}(a-b) \\ &= k^{n-2}\{2(a-b)(n-1) + kb\} \quad (\because a=b) \end{aligned}$$

と求めることができる。

[1]

$a=b$ のとき,

$$x_n = k^{n-2} \{2(a-b)(n-1) + ka\} = k^{n-1} a$$

であるから、

$$x_n = y_n \neq 0$$

となる。したがって、

$$\frac{x_n}{y_n} = 1 (\cdots \bar{\tau})$$

である。また、 $a < 0$ かつ $k > 0$ のとき、

$$\begin{aligned} z_n &= x_n + y_n i \\ &= k^{n-1} a (1+i) \\ &= -\sqrt{2} k^{n-1} a \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i \right) \\ &= -\sqrt{2} k^{n-1} a \left(\cos \frac{5}{4} \pi + i \sin \frac{5}{4} \pi \right) \end{aligned}$$

と変形できるから、

$$\arg z_n = \frac{5}{4}\pi (\cdots)$$

である。

[2]

n が十分大きい場合を考える。 $a > b$ のとき、

$$2(a-b)(n-1)+kb>0$$

である。また、 $a < b$ のとき、

$$2(a-b)(n-1)+kb < 0$$

である。よって、 $a \neq b, n \rightarrow \infty$ のとき

$$y_n \neq 0$$

となるから、

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k^{n-2} \{2(a-b)(n-1) + ka\}}{k^{n-2} \{2(a-b)(n-1) + kb\}} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(a-b)(n-1) + ka}{2(a-b)(n-1) + kb} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(a-b)\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{ka}{n}}{2(a-b)\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{kb}{n}} \\&= \frac{2(a-b)}{2(a-b)} \\&= 1(\cdots+)\end{aligned}$$

である。

Ⅲ

【解答】

	㉔	㉕	㉖	㉗	㉘	
[1]	$\frac{-a-b}{c}$	$\frac{a-b}{c}$	$a+b \leq c$	$ a-b \leq c$	$\frac{4}{c}$	
	㉙	㉚	㉛	㉜	㉝	㉞
[2]	$a+b > c$	$ a-b \leq c$	$\frac{a-c}{b}$	$\frac{b-c}{a}$	$\frac{(a+b-c)^2}{2abc}$	$\frac{4ab-(a+b-c)^2}{abc}$

【解説】

[1]

平面 H は

$$ax+by+cz=0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

と表すことができる。A₁, B₁ を通る直線は $x=1, y=1$ であるから、この直線と平面 H の共有点の z 座標は、これを①に代入して、

$$\begin{aligned} a+b+cz &= 0 \\ \Leftrightarrow z &= -\frac{a+b}{c} (\cdots \text{㉔}) \quad (\because c \neq 0) \end{aligned}$$

となる。また、A₄, B₄ を通る直線は $x=-1, y=1$ であるから、この直線と平面 H の共有点の z 座標は、これを①に代入して、

$$\begin{aligned} -a+b+cz &= 0 \\ \Leftrightarrow z &= \frac{a-b}{c} (\cdots \text{㉕}) \quad (\because c \neq 0) \end{aligned}$$

となる。同様にして、A₂, B₂ を通る直線、A₃, B₃ を通る直線と平面 H の共有点の z 座標はそれぞれ $z = \frac{-a+b}{c}, \frac{a+b}{c}$ となる。これより線分 A₁B₁, A₂B₂, A₃B₃, A₄B₄ の全てと平面 H が共有点をもつための必要十分条件は、

$$\begin{aligned} -1 \leq -\frac{a+b}{c} \leq 1, \quad -1 \leq \frac{-a+b}{c} \leq 1, \quad -1 \leq \frac{a-b}{c} \leq 1, \quad -1 \leq \frac{a+b}{c} \leq 1 \\ \Leftrightarrow a+b \leq c, \quad |a-b| \leq c (\cdots \text{㉖} \text{㉗}) \quad (\because c > 0) \end{aligned}$$

である。ここで、線分 A₁B₁, A₂B₂, A₃B₃, A₄B₄ と平面 H の交点をそれぞれ C₁, C₂, C₃, C₄ とすると、

$$C_1\left(1, 1, -\frac{a+b}{c}\right), C_2\left(1, -1, \frac{-a+b}{c}\right), C_3\left(-1, -1, \frac{a+b}{c}\right), C_4\left(-1, 1, \frac{a-b}{c}\right)$$

となる。 $\overline{C_1C_2} = \left(0, -2, \frac{2b}{c}\right), \overline{C_4C_3} = \left(0, -2, \frac{2b}{c}\right)$ より、 $\overline{C_1C_2} = \overline{C_4C_3}$ となるから、四角形

C₁C₂C₃C₄ は平行四辺形である。また、 $\overline{C_1C_4} = \left(-2, 0, \frac{2a}{c}\right)$ である。よって、切り口の面積は対称性より、

$$\begin{aligned} & 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{|\overline{C_1C_2}|^2 \cdot |\overline{C_1C_4}|^2 - (\overline{C_1C_2} \cdot \overline{C_1C_4})^2} \\ &= \sqrt{\left(4 + \frac{4b^2}{c^2}\right) \left(4 + \frac{4a^2}{c^2}\right) - \left(\frac{4ab}{c^2}\right)^2} \\ &= \frac{4}{c} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} (\cdots \text{㉘}) \end{aligned}$$

となる。

[2]

線分 A₁B₁ を通らないということは、 $\frac{-a-b}{c} < -1$ より、

$$\frac{-a-b}{c} < -1$$

であり、線分 A₄B₄ を通るということは、

$$-1 \leq \frac{a-b}{c} \leq 1$$

であるから、線分 A₁B₁ と平面 H が共有点を持たず、線分 A₄B₄ と平面 H が共有点を持つための必要十分条件は、

$$a+b > c, |a-b| \leq c (\cdots \text{㉙} \text{㉚})$$

である。ここで、A₃, A₄ を通る直線は、 $x=-1, z=1$ であるから、これを①に代入することで点 P の y 座標は、

$$\begin{aligned} -a+by+c &= 0 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{a-c}{b} (\cdots \text{㉛}) \quad (\because b \neq 0) \end{aligned}$$

と求められる。また、A₂, A₃ を通る直線は、 $y=-1, z=1$ であるから、これを①に代入することで点 Q の x 座標は、

$$\begin{aligned} ax-b+c &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{b-c}{a} (\cdots \text{㉜}) \quad (\because a \neq 0) \end{aligned}$$

と求められる。よって、 $P\left(-1, \frac{a-c}{b}, 1\right), Q\left(\frac{b-c}{a}, -1, 1\right)$ であり、[1] の C₃ と R は一致する

から、 $R\left(-1, -1, \frac{a+b}{c}\right)$ である。ゆえに、

$$\overline{PQ} = \left(\frac{a+b-c}{a}, \frac{-a-b+c}{b}, 0\right), \overline{PR} = \left(0, \frac{-a-b+c}{b}, \frac{a+b-c}{c}\right)$$

であるから、△PQR の面積は、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{|\overline{PQ}|^2 \cdot |\overline{PR}|^2 - (\overline{PQ} \cdot \overline{PR})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(a+b-c)^2 (a^2+b^2)}{a^2 b^2} \cdot \frac{(a+b-c)^2 (b^2+c^2)}{b^2 c^2} - \left\{ \frac{(a+b-c)^2}{b^2} \right\}^2} \\ &= \frac{(a+b-c)^2}{b^2} \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2} \cdot \frac{b^2+c^2}{c^2} - 1} \\ &= \frac{(a+b-c)^2}{2abc} \sqrt{a^2+b^2+c^2} (\cdots \text{㉝}) \end{aligned}$$

となる。平面 H による切り口の面積は、対称性より [1] での平面 H による切り口から △PQR と合同な三角形を 2 個除いたものの面積に等しいから

$$\frac{4}{c} \sqrt{a^2+b^2+c^2} - 2 \cdot \frac{(a+b-c)^2}{2abc} \sqrt{a^2+b^2+c^2} = \frac{4ab-(a+b-c)^2}{abc} \sqrt{a^2+b^2+c^2} (\cdots \text{㉞})$$

となる。

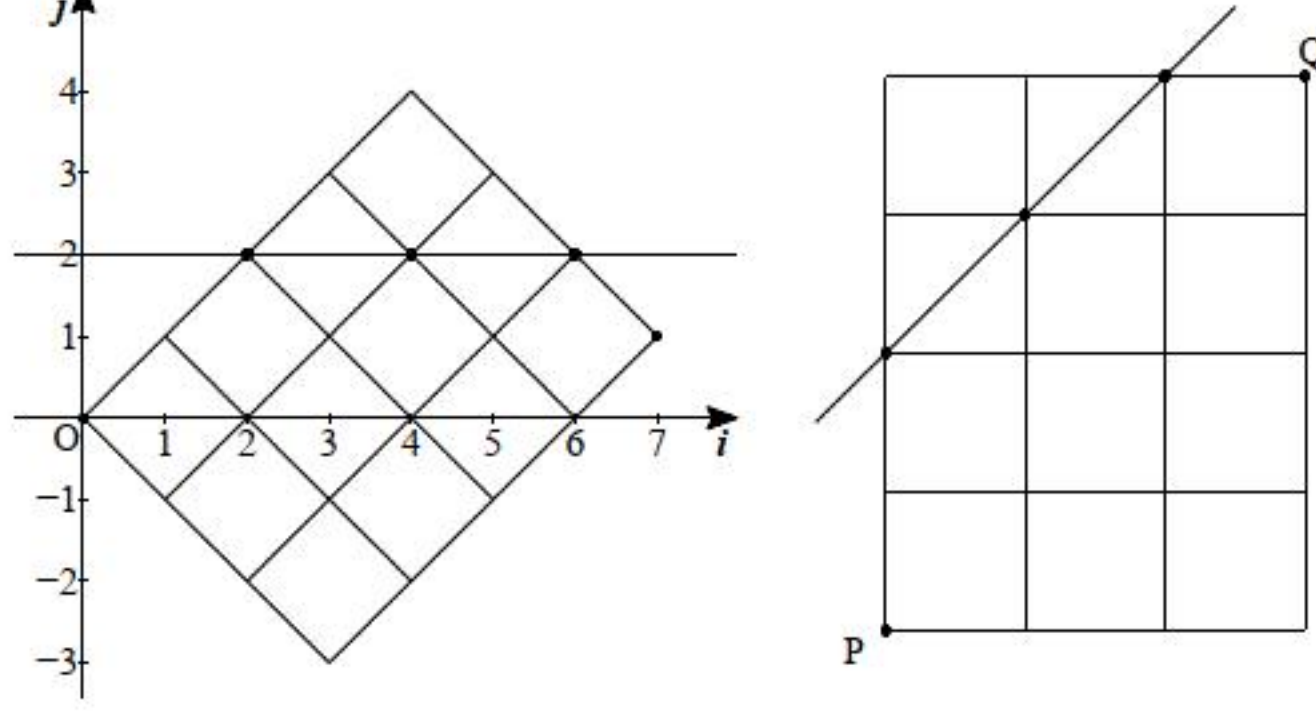
IV

【解答】

〔1〕	△	メ	モ	ヤ	ユ
	35	2	4	15	21
〔2〕	ヨ	ラ	リ	ル	
	126	84	26	110	

【解説】

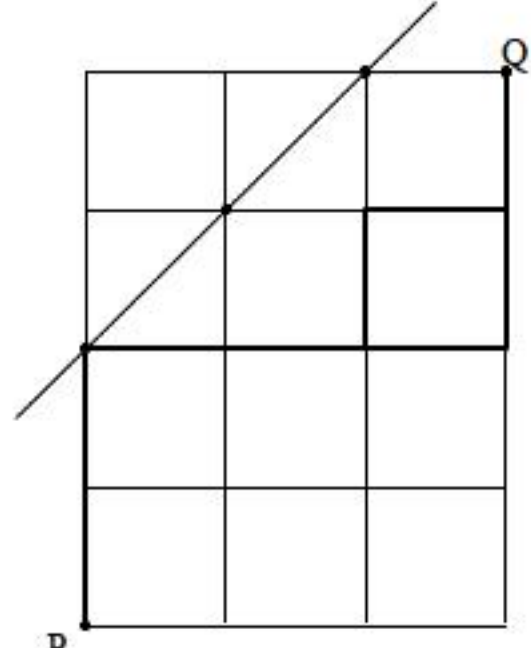
〔1〕



ちょうど7ステップで(0, 0)から(7, 1)にたどり着く経路の総数は、右上図のように3×4の格子状の道があるときに点Pから点Qに至る最短経路の総数と一致する。この最短経路の総数は、右方向に進むステップの選び方を考えて、 ${}_7C_3 = 35$ (通り)($\cdots \Delta$)である。

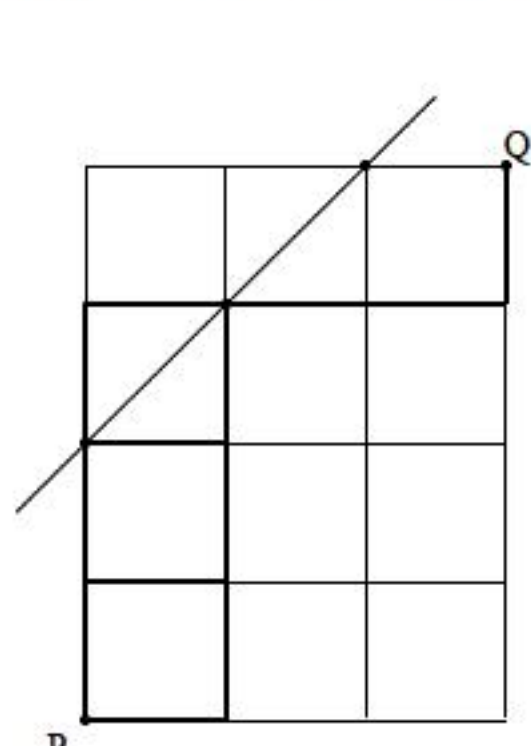
次に、その経路の中で少なくとも1回は $j=2$ の位置を通るものを考える。

〔1〕最後に $j=2$ の位置を通るのがちょうど2ステップ後である経路



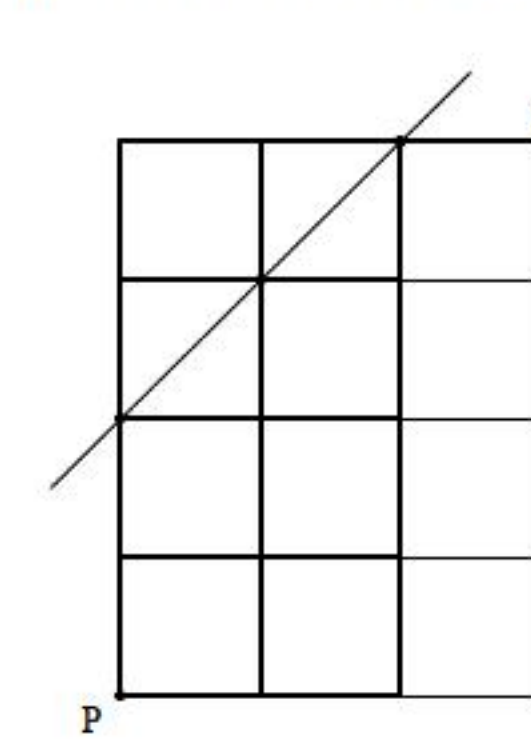
上図の太線部のみを通り点Pから点Qに至る最短経路であるから、 ${}_2C_1 = 2$ (通り)($\cdots \text{メ}$)である。

〔2〕最後に $j=2$ の位置を通るのがちょうど4ステップ後である経路



上図の太線部のみを通り点Pから点Qに至る最短経路であるから、どのステップで初めて右方向に移動するかを考えて、 ${}_4C_1 = 4$ (通り)($\cdots \text{モ}$)である。

〔3〕最後に $j=2$ の位置を通るのがちょうど6ステップ後である経路



上図の太線部のみを通り点Pから点Qに至る最短経路であるから、 ${}_6C_2 = 15$ (通り)($\cdots \text{ヤ}$)である。

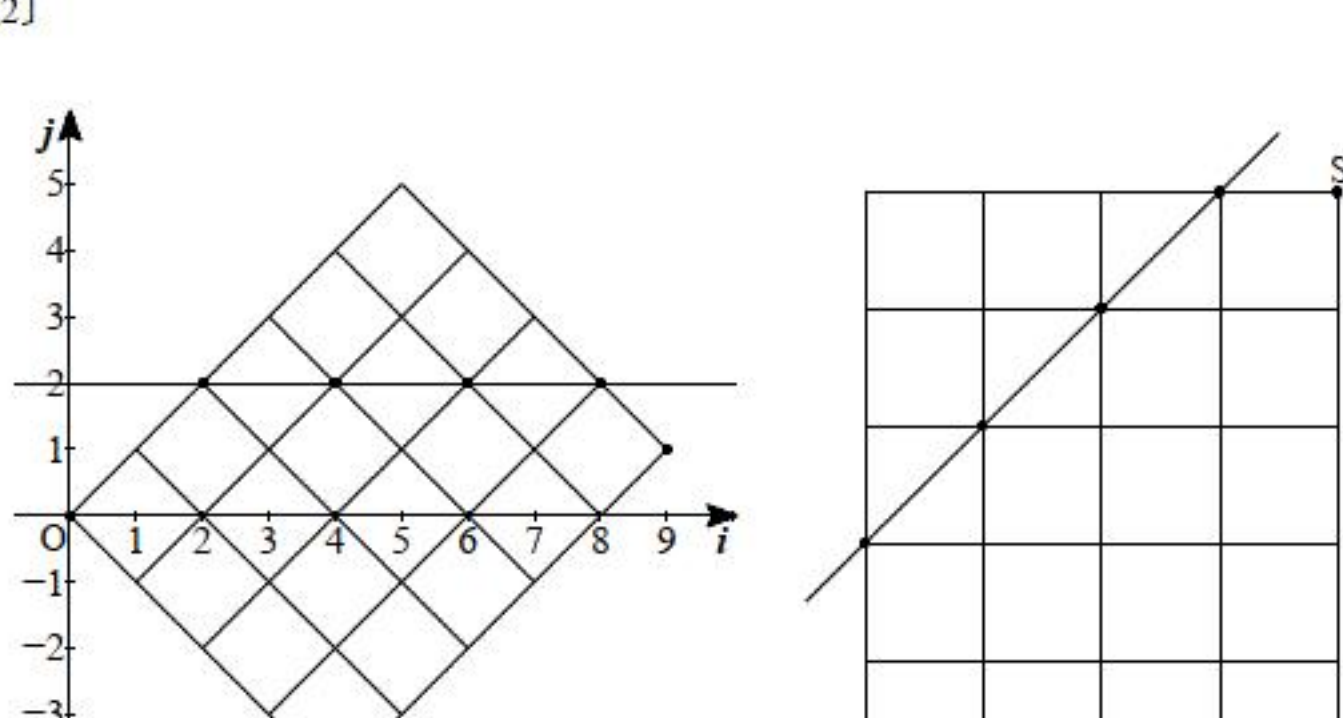
少なくとも1回は $j=2$ の位置を通るとき、最後に $j=2$ の位置を通るのは必ず2ステップ後、または4ステップ後、または6ステップ後のどれかであり、これらの事象は互いに排反である。

したがって、求める場合の数は、〔1〕, 〔2〕, 〔3〕より

$$2 + 4 + 15 = 21 (\cdots \text{ユ})$$

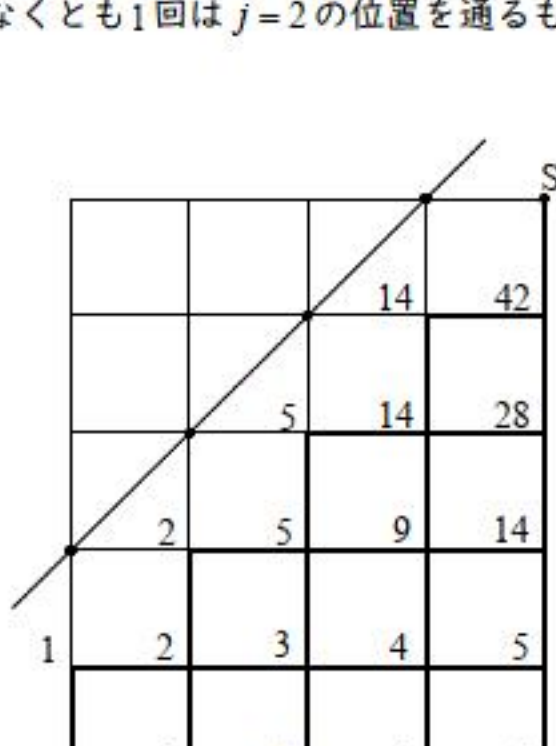
通りであることがわかる。

〔2〕



ちょうど9ステップで(0, 0)から(9, 1)にたどり着く経路の総数は、右上図のように4×5の格子状の道があるときに点Rから点Sに至る最短経路の総数と一致する。この最短経路の総数は、右方向に進むステップの選び方を考えて、 ${}_9C_4 = 126$ (通り)($\cdots \text{ヨ}$)である。

次に、その経路の中で少なくとも1回は $j=2$ の位置を通るものを考える。

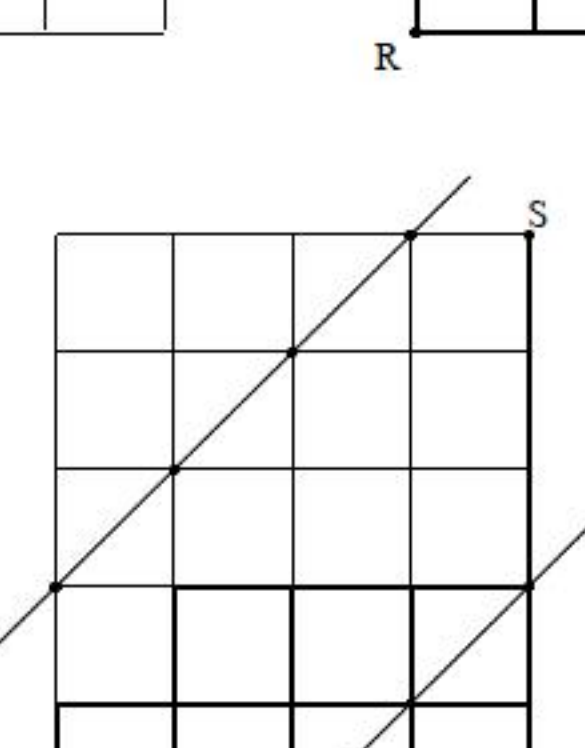
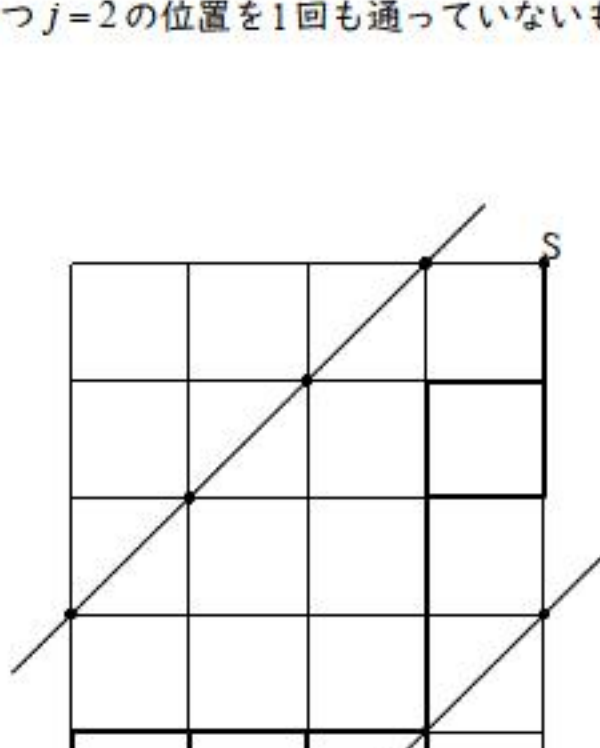
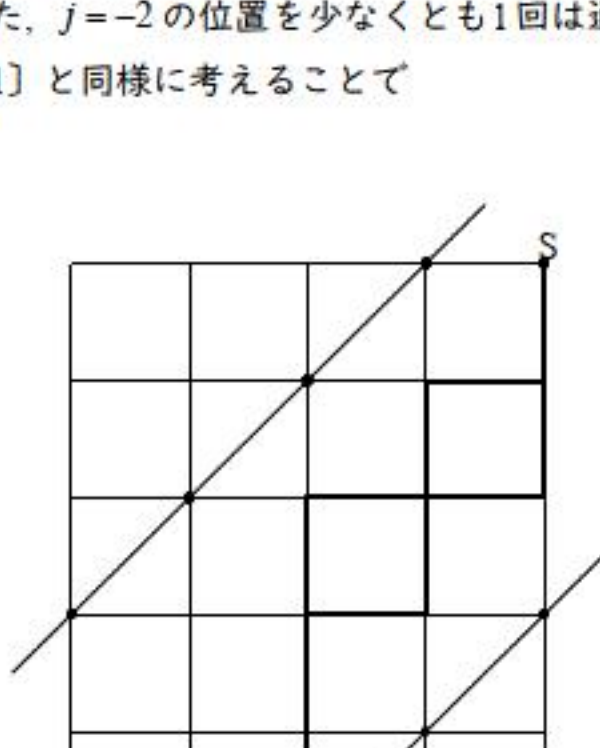


上図の各数字は、点Rからその格子点に至る経路の総数を表す。図より、 $j=2$ の位置を通らないものは42通りであることがわかるから、少なくとも1回は $j=2$ の位置を通るものは

$$126 - 42 = 84 (\cdots \text{ラ})$$

通りである。

また、 $j=-2$ の位置を少なくとも1回は通り、かつ $j=2$ の位置を1回も通っていないものは、〔1〕と同様に考えることで



上図より

$${}_2C_1 \cdot {}_4C_1 + {}_4C_1 \cdot {}_4C_1 + ({}_6C_2 - 1) = 26 (\cdots \text{リ})$$

通りとなる。

したがって、 $j=2$ または $j=-2$ の位置を少なくとも1回は通っているものは、これまでの結果より

$$84 + 26 = 110 (\cdots \text{ル})$$

通りであることがわかる。