

(第3時限：100分)

2017年度 ③

数 学 問 題

(理 系)

(全6ページ)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 問題文の にあてはまる適当なものを、解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
3. 解答用紙1枚・下書用紙2枚は、この冊子の中に折り込んであります。
4. 試験終了後、問題冊子・下書用紙は持ち帰りなさい。

数 学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの設問について問題文の にあてはまる適当なものを，
解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

Ⅰ O を原点とする座標平面上において，点 P は点 O を中心とする半径 2 の円周上を反時計回りに動き，点 Q は点 P を中心とする半径 1 の円周上を反時計回りに動く。時刻 $t = 0$ のとき，点 P は $(2, 0)$ にあり，点 Q は $(3, 0)$ にある。時刻 t のとき，線分 OP は， x 軸の正の部分を開始とした角 t の動径とする。また，時刻 t のとき，線分 PQ は，点 P を始点とし動径 OP を延長した半直線を開始とした角 t の動径とする。ただし， $0 \leq t \leq \pi$ とする。

〔1〕 時刻 t における点 Q の座標は $(\text{ア}, \text{イ})$ である。

〔2〕 時刻 $t = \frac{\pi}{2}$ における点 Q の速度ベクトルは $(\text{ウ}, \text{エ})$ ，
速さは オ である。

〔3〕 点 Q の x 座標は， $t = \text{カ}$ のとき最小値 キ となる。

〔4〕 点 Q の y 座標の最大値は ク である。

〔5〕 点 Q の軌跡と x 軸で囲まれた図形の面積は ケ である。

II a, b, k は 0 ではない実数とし, i は虚数単位とする。複素数からなる数列 $\{z_n\}$ を次の漸化式で定める。

$$z_1 = a + bi, \quad z_n = (k + 2i)z_{n-1} + 2\overline{z_{n-1}} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

数列 $\{z_n\}$ の一般項を次の手順で求める。まず, $z_n = x_n + y_n i$ とおく。ただし, x_n, y_n は実数である。このとき数列 $\{z_n\}$ の漸化式から, 数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ に関する漸化式

$$\begin{cases} x_n = \left(\boxed{\text{コ}} \right) x_{n-1} - \boxed{\text{サ}} y_{n-1} \\ y_n = \boxed{\text{シ}} x_{n-1} + \left(\boxed{\text{ス}} \right) y_{n-1} \end{cases} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

を得る。これより $x_n - y_n = \boxed{\text{セ}}$ を得る。したがって, 数列 $\{x_n\}$ は漸化式

$$x_n = \boxed{\text{ソ}} x_{n-1} + \boxed{\text{タ}} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

を満たす。これより, 数列 $\{x_n\}$ の一般項は

$$x_n = \boxed{\text{チ}} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

と求まり, 数列 $\{y_n\}$ の一般項も

$$y_n = \boxed{\text{ツ}} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

と求まる。

(注: $\boxed{\text{セ}}$, $\boxed{\text{タ}}$ ~ $\boxed{\text{ツ}}$ は, a, b, k, n を用いて表せ。 $\boxed{\text{ソ}}$ は k を用いて表せ。)

次に, z_n の実部 x_n と虚部 y_n との比を調べる。

[1] $a = b$ のとき, $\frac{x_n}{y_n} = \boxed{\text{テ}}$ である。また, $a < 0$ かつ $k > 0$ のとき,

$\arg z_n = \boxed{\text{ト}}$ である。ただし, z_n の偏角 $\arg z_n$ は $0 \leq \arg z_n < 2\pi$ とする。

[2] $a \neq b$ のとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \boxed{\text{ナ}}$ である。

Ⅲ Oを原点とする座標空間において、8点 $A_1(1, 1, 1)$, $A_2(1, -1, 1)$, $A_3(-1, -1, 1)$, $A_4(-1, 1, 1)$, $B_1(1, 1, -1)$, $B_2(1, -1, -1)$, $B_3(-1, -1, -1)$, $B_4(-1, 1, -1)$ を頂点とする立方体 $A_1A_2A_3A_4 - B_1B_2B_3B_4$ がある。また、正の定数 a, b, c に対し、原点を通りベクトル (a, b, c) に垂直な平面を H とする。

- [1] 点 A_1, B_1 を通る直線と平面 H との共有点の z 座標は であり、点 A_4, B_4 を通る直線と平面 H との共有点の z 座標は である。これより、4つの線分 $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4$ の全てと平面 H が共有点を持つための a, b, c が満たすべき必要十分条件は かつ である。 a, b, c が かつ を満たすとき、立方体 $A_1A_2A_3A_4 - B_1B_2B_3B_4$ の平面 H による切り口の面積は $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ となる。
(注: , には、 a, b, c の関係式を入れよ。)

- [2] 線分 A_1B_1 と平面 H が共有点を持たず、線分 A_4B_4 と平面 H が共有点を持つための a, b, c が満たすべき必要十分条件は かつ である。 a, b, c が かつ を満たすとき、線分 A_3A_4 と平面 H , 線分 A_2A_3 と平面 H はそれぞれ共有点を持つ。これらをそれぞれ点 P, Q とすると、点 P の y 座標は であり、点 Q の x 座標は である。点 A_3, B_3 を通る直線と平面 H との共有点を R とすると、 $\triangle PQR$ の面積は $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ である。よって、立方体 $A_1A_2A_3A_4 - B_1B_2B_3B_4$ の平面 H による切り口の面積は $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ となる。
(注: , には、 a, b, c の関係式を入れよ。)

(このページは空白)

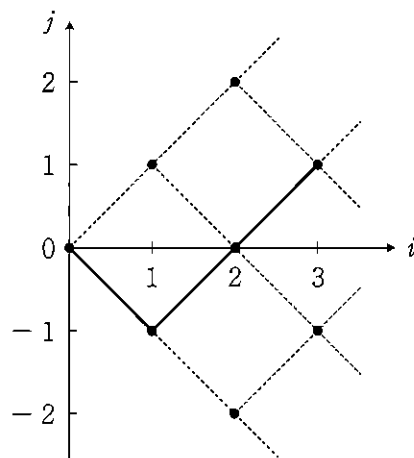
Ⅳ 点Pが数直線上の原点から出発して、1ステップごとに、正の方向もしくは負の方向に1動くとする。点Pが*i*ステップ後に*j*の位置にあることを(*i*, *j*)と表す。ただし、0ステップで点Pが原点の位置にあることを(0, 0)と表す。このとき、ちょうど3ステップで(0, 0)から(3, 1)にたどり着く経路は3通りである。その一例を図に実線で示す。また、それら3通りの経路の中で少なくとも1回は*j* = 2の位置を通っているものは1通りである。

[1] ちょうど7ステップで(0, 0)から(7, 1)にたどり着く経路を考える。

(0, 0)から(7, 1)にたどり着く経路は ム 通りである。その経路の中で少なくとも1回は*j* = 2の位置を通るものを考える。この中で最後に*j* = 2の位置を通るのがちょうど2ステップ後である経路は メ 通りである。同様に、最後に*j* = 2の位置を通るのがちょうど4ステップ後である経路は モ 通りである。また、最後に*j* = 2の位置を通るのがちょうど6ステップ後である経路は ヤ 通りである。したがって(0, 0)から(7, 1)にたどり着く経路の中で、少なくとも1回は*j* = 2の位置を通っているものは ユ 通りである。

[2] ちょうど9ステップで(0, 0)から(9, 1)にたどり着く経路を考える。

(0, 0)から(9, 1)にたどり着く経路は ヨ 通りであり、その中で少なくとも1回は*j* = 2の位置を通っているものは ラ 通りである。また、(0, 0)から(9, 1)にたどり着く経路で、*j* = -2の位置を少なくとも1回は通りかつ、*j* = 2の位置を1回も通っていないものは リ 通りである。したがって、*j* = 2 または *j* = -2 の位置を少なくとも1回は通っているものは ル 通りである。



図：実線は，ちょうど3ステップで $(0, 0)$ から $(3, 1)$ にたどり着く経路の一例