

【解答】

〔1〕	ア	イ	ウ			
	18	$\sqrt{5}$	$-\sqrt{5}$			
〔2〕	エ	オ	カ			
	$n-k-1$	$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$	$\frac{1}{3}n(n-1)(n-2)$			
〔3〕	キ	ク	ケ	コ	サ	シ
	2	-4	$2\sqrt{5}$	2	4	$-\frac{1}{2}$

【解説】

〔1〕

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2=x^4+\frac{1}{x^4}+2=9$$

であり、 $x^2+\frac{1}{x^2}>0$ より

$$x^2+\frac{1}{x^2}=3$$

である。よって

$$\begin{aligned}x^6+\frac{1}{x^6}&=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\\&=3\cdot7-3\\&=18\end{aligned}$$

となる。また

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2=5$$

であり、 $x>0$ より $x+\frac{1}{x}>0$ であるから $x+\frac{1}{x}=\sqrt{5}$ である。ここで

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2=1$$

であり、 $0<x<1$ より $x-\frac{1}{x}<0$ であるから $x-\frac{1}{x}=-1$ である。よって

$$x^2-\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)=-\sqrt{5}$$

となる。

〔2〕

正の整数 k に対して、 $x=k$ とする。このとき、求める整数の組 (x,y) は、①より

$$\begin{cases}k>0\\y>0\\y<n-k\end{cases}\quad\cdots\cdots\textcircled{2}$$

を満たす。②を満たすような整数 y が存在するための k の条件は、 $k\geq1$ より、

$$\begin{aligned}0<y<n-k&\text{かつ}k\geq1\\\Leftrightarrow1\leq y\leq n-k-1&\text{かつ}k\geq1\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}n-k-1\geq1&\text{かつ}k\geq1\\\Leftrightarrow1\leq k\leq n-2\end{aligned}$$

となる。したがって、 $1\leq k\leq n-2$ を満たす整数 k が存在するような n の条件は、

$$\begin{aligned}1\leq n-2&\text{かつ}n\geq2\\\Leftrightarrow n\geq3\end{aligned}$$

となるから、②を満たすような整数 y が存在するような n,k の条件は、

$$1\leq k\leq n-2\text{かつ}n\geq3\quad\cdots\cdots\textcircled{3}$$

である。このもとで、 $1\leq y\leq n-k-1$ より、 y のとりうる値は $n-k-1$ 個である。したがって、①を満たすような整数の組 (x,y) は、 $n\geq3$ のとき、

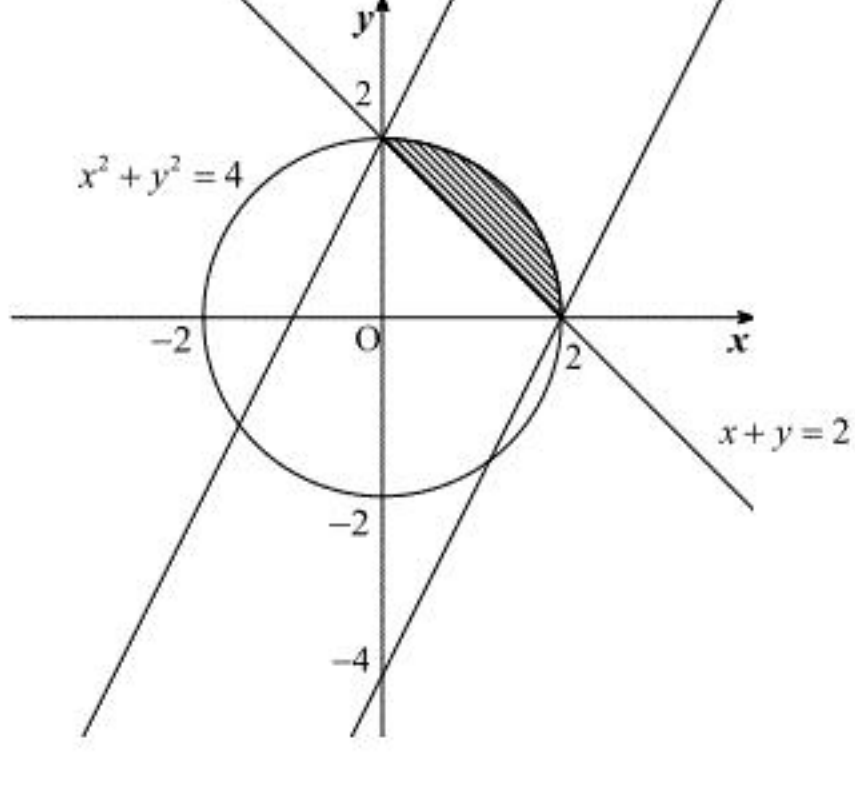
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-2}(n-k-1)&=(n-2)(n-1)-\frac{1}{2}(n-2)(n-1)\\&=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)(\text{組})\end{aligned}$$

である。 $n=2$ のとき、①を満たすような整数の組 (x,y) は $x\geq1,y\geq1$ より存在しないので、 $n\geq2$ において①を満たすような整数の組 (x,y) は、 $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)(\text{組})$ である。また、 $n\geq3$ のとき、①を満たす整数の組 (x,y) のうち、整数 $l(l\geq2)$ に対して、 $x+y=l$ となるものは $(x,y)=(1,l-1),(2,l-2),\ldots,(l-1,1)$ の $l-1$ 組ある。よって、これらの和は $l(l-1)$ である。 $n\geq3$ のとき、 l は2以上 $n-1$ 以下の整数をとるから、①を満たす x と y の値をすべて足し合わせると

$$\begin{aligned}\sum_{l=2}^{n-1}l(l-1)&=\sum_{l=1}^{n-1}(l^2-l)\left(\because1^2-1=0\right)\\&=\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)-\frac{1}{2}(n-1)n\\&=\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1-3)\\&=\frac{1}{3}n(n-1)(n-2)\end{aligned}$$

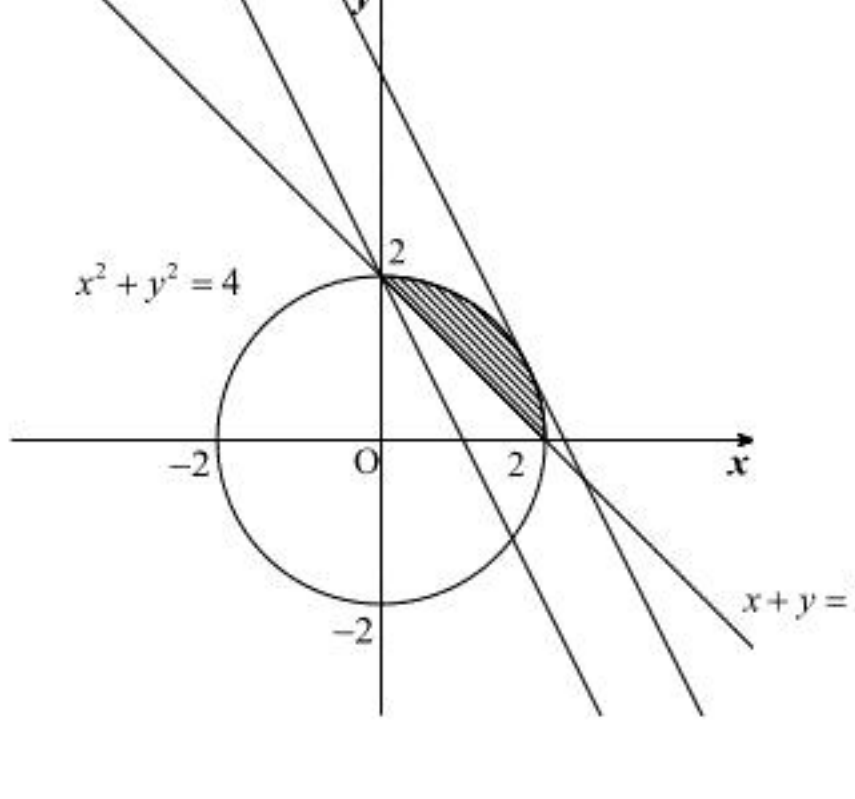
となる。①を満たすような整数の組 (x,y) は、 $n=2$ のとき存在しないから、 $n\geq2$ において①を満たす x と y の値をすべて足し合わせると $\frac{1}{3}n(n-1)(n-2)$ となる。

〔3〕 (a)



領域 D は上図の斜線部分である。 $-2x+y=k$ とすると、 k は直線 $y=2x+k$ の y 切片の値である。したがって、 $(x,y)=(0,2)$ のとき最大値2を、 $(x,y)=(2,0)$ のとき最小値-4をとることがわかる。

(b)



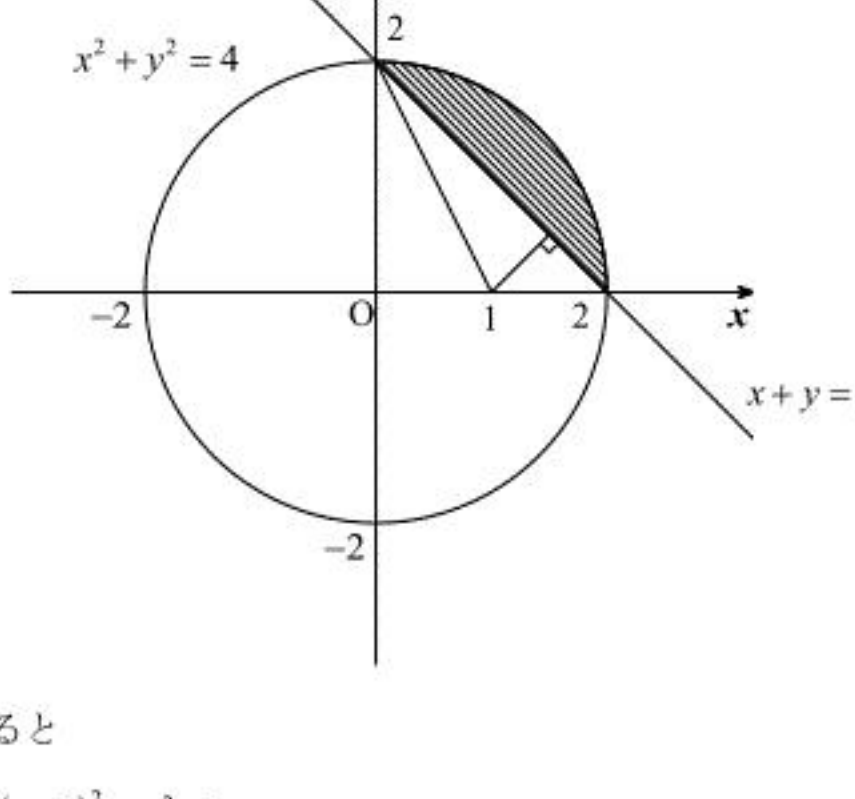
$2x+y=k$ とおくと、 k は直線 $y=-2x+k$ の y 切片の値である。直線 $x+y=2$ の傾きは-1であることから、 k は $(x,y)=(0,2)$ で最小値2をとることがわかる。また、直線 $y=-2x+k$ が円 $x^2+y^2=4$ と第1象限で接するとき k は最大となる。このとき、点と直線の距離の公式より

$$\frac{|2\cdot0+1\cdot0-k|}{\sqrt{5}}=2$$

$$\therefore k=2\sqrt{5}\left(\because k>0\right)$$

となるから、最大値は $2\sqrt{5}$ である。

(c)



x^2+y^2-2x を変形すると

$$x^2+y^2-2x=(x-1)^2+y^2-1$$

となるので、 D 上の点 (x,y) と $(1,0)$ の距離を考えればよい。点 $(1,0)$ と直線 $x+y=2$ との距離は

$$\frac{|1\cdot1+1\cdot0-2|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

であるから、 x^2+y^2-2x の最小値は $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-1=-\frac{1}{2}$ である。また、点 $(1,0)$ からの距離が最大となる点は円 $x^2+y^2=4$ 上に存在する。このとき

$$x^2+y^2-2x=4-2x$$

となり、最大値をとるのは (x,y) が円 $x^2+y^2=4$ 上にあり、かつ x 座標が最小のときであることがわかる。したがって、 $(x,y)=(0,2)$ のとき、最大値は $4-2\cdot0=4$ となる。

II

〔解答〕

	ア	イ	ウ	エ	オ
[1]	$\frac{q^2}{25}$	576	6760	125	5250
	カ	キ	ク		
[2]	$10(L_1 + L_2) + 1000$	7250	4130		

〔解説〕

[1]

①より、製品 P を q 作るために必要な従業員数 L を q で表すと、

$$q^2 = 25L \Leftrightarrow L = \frac{q^2}{25}$$

となる。このとき製造原価は、 $25a + bL$ で表されるので、 $a = 40$, $b = 10$ を代入することで、 $10L + 1000$ となる。製品 P を 120 製造するために必要な従業員数は、

$$L = \frac{120^2}{25} = 576$$

であり、このとき製造原価は

$$10 \cdot 576 + 1000 = 6760$$

となる。製品 P の単価が 100 であるとき、利益は

$$\begin{aligned} 100q - (10L + 1000) &= 100q - 10 \cdot \frac{q^2}{25} - 1000 \\ &= -\frac{2}{5}q^2 + 100q - 1000 \\ &= -\frac{2}{5}(q - 125)^2 + 5250 \end{aligned}$$

となり、生産量 $q = 125$ で最大値 5250 をとることがわかる。

[2]

全従業員数は $L_1 + L_2$ であるから、製造原価は $10(L_1 + L_2) + 1000$ となる。また、②より

$$L_1 = \frac{q_1^2}{25}, L_2 = \frac{q_2^2}{25}$$

であるから、これらを代入すると、製造原価は

$$\frac{2}{5}(q_1^2 + q_2^2) + 1000$$

と表せる。P₁ だけを 125 製造するときの製造原価は、 $q_1 = 125$, $q_2 = 0$ を代入して

$$\frac{2}{5}(125^2 + 0^2) + 1000 = 7250$$

であり、P₁ を $q_1 = 125 - 60 = 65$, P₂ を $q_2 = 60$ 製造するときの製造原価は、

$$\frac{2}{5}(65^2 + 60^2) + 1000 = 4130$$

となる。

Ⅲ

[1] (a)

求める確率は、小さいずれの立方体も3の面が出る確率であるから、

$$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

である。

(答) $\frac{1}{36}$

(b)

面の出方は全部で 6^4 通りあり、これらは同様に確からしい。 $\vec{p} + \vec{q} = (4, 2)$ となる $\vec{p}, \vec{q}$ の組み合わせは、以下の3通りある。

[1] $\vec{p} = (1, 1), \vec{q} = (3, 1)$ のとき

面の出方は

$$(3 \times 2) \times (1 \times 2) = 12 \text{ (通り)}$$

である。

[2] $\vec{p} = (2, 1), \vec{q} = (2, 1)$ のとき

面の出方は

$$(2 \times 2) \times (2 \times 2) = 16 \text{ (通り)}$$

である。

[3] $\vec{p} = (3, 1), \vec{q} = (1, 1)$ のとき

面の出方は

$$(1 \times 2) \times (3 \times 2) = 12 \text{ (通り)}$$

である。

以上, [1], [2], [3]より, 求める確率は,

$$\frac{12 + 16 + 12}{6^4} = \frac{5}{162}$$

である。

(答) $\frac{5}{162}$

[2] (a)

$\vec{p} = (1, 2)$ かつ $\vec{q} = (3, 3)$ となる確率は,

$$\frac{(3 \times 2) \times (1 \times 1)}{6^4} = \frac{1}{216}$$

であり, $\triangle OPQ$ の面積は

$$\frac{1}{2} |1 \times 3 - 2 \times 3| = \frac{3}{2}$$

である。

(答) 確率 $\frac{1}{216}$, 面積 $\frac{3}{2}$

(b)

$\vec{p} = (a, b), \vec{q} = (c, d)$ とおくと,

$$1 \leq a \leq 3, 1 \leq c \leq 3, 1 \leq b \leq 4, 1 \leq d \leq 4$$

であり, $\triangle OPQ$ の面積が3のとき,

$$\frac{1}{2} |ad - bc| = 3$$

$$\therefore ad - bc = \pm 6$$

が成り立つ。ここで, $ad - bc = 6$ となる確率と $ad - bc = -6 \Leftrightarrow bc - ad = 6$ となる確率は等しいので, $ad - bc = 6$ の場合を考える。 $bc \geq 1$ より, $ad \geq 7$ であり, (a, d) の組は,

$$(a, d) = (2, 4), (3, 3), (3, 4)$$

となる。

[1] $(a, d) = (2, 4)$ のとき,

$bc = 2$ より, $(b, c) = (1, 2)$ または $(2, 1)$ であり, このとき面の出方は,

$$(2 \times 1) \times \{(2 \times 2) + (2 \times 3)\} = 20 \text{ (通り)}$$

である。

[2] $(a, d) = (3, 3)$ のとき,

$bc = 3$ より, $(b, c) = (1, 3)$ または $(3, 1)$ であり, このとき面の出方は,

$$(1 \times 1) \times \{(2 \times 1) + (1 \times 3)\} = 5 \text{ (通り)}$$

である。

[3] $(a, d) = (3, 4)$ のとき,

$bc = 6$ より, $(b, c) = (2, 3)$ または $(3, 2)$ であり, このとき面の出方は,

$$(1 \times 1) \times \{(2 \times 1) + (1 \times 2)\} = 4 \text{ (通り)}$$

である。

以上, [1], [2], [3]より, $ad - bc = 6$ となるとき面の出方は

$$20 + 5 + 4 = 29 \text{ (通り)}$$

であるから, 求める確率は,

$$\frac{29 \cdot 2}{6^4} = \frac{29}{648}$$

である。

(答) $\frac{29}{648}$

(c)

(b)と同様,

$$\vec{p} = (a, b), \vec{q} = (c, d) \quad (1 \leq a \leq 3, 1 \leq c \leq 3, 1 \leq b \leq 4, 1 \leq d \leq 4)$$

とおくと, $\triangle OPQ$ の面積は, $\frac{1}{2} |ad - bc|$ と表される。これが最大となり得るのは

「 ad が最大かつ bc が最小」または「 ad が最小かつ bc が最大」

のときであり,

「 $(a, d) = (3, 4), (b, c) = (1, 1)$ 」または「 $(a, d) = (1, 1), (b, c) = (3, 4)$ 」

となる。このとき面積はいずれの場合も

$$\frac{1}{2} |12 - 1| = \frac{11}{2}$$

であるから, 最大値は $\frac{11}{2}$ とわかる。また, この値をとる確率は

$$\frac{(1 \times 1) \times (3 \times 2)}{6^4} \times 2 = \frac{1}{108}$$

である。

(答) 面積の最大値 $\frac{11}{2}$, 確率 $\frac{1}{108}$