

〔解答〕

〔1〕	ア	イ	ウ	エ	オ
	$e^{\frac{1}{c}}$	$\frac{1}{ec}$	$-\infty$	$x^{-\frac{c}{2}}$	0
〔2〕	カ	キ	ク		
	1	e	(2, 4)		

〔解説〕

〔1〕

$f_c(x)=\frac{\log x}{x^c}$ のとき,

$$f_c'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^c-(\log x)\cdot cx^{c-1}}{x^{2c}}=\frac{1-c\log x}{x^{c+1}}$$

であり,

$$\begin{aligned} f_c'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 1-c\log x &= 0 \\ \Leftrightarrow \log x &= \frac{1}{c} \\ \Leftrightarrow x &= e^{\frac{1}{c}} \end{aligned}$$

であるから、 $x>0$ における $f_c(x)$ の増減は以下のようになる。

x	(0)	...	$e^{\frac{1}{c}}$	...	(∞)
$f'(x)$	↗	+	0	-	↘
$f(x)$		↗	極大	↘	

よって、 $f_c(x)$ は $x=e^{\frac{1}{c}}$ で最大値 $f_c\left(e^{\frac{1}{c}}\right)=\frac{1}{e}=\frac{1}{ec}$ をとる。

また、 $c>0$ より $\lim_{x\rightarrow +0}\frac{1}{x^c}=\infty$ であり、 $\lim_{x\rightarrow +0}\log x=-\infty$ であるから、

$$\lim_{x\rightarrow +0}f_c(x)=\lim_{x\rightarrow +0}\frac{1}{x^c}\cdot\log x=-\infty$$

となる。また、 $f_c(x)=\frac{\log x}{x^{\frac{c}{2}}}$ であるから

$$\begin{aligned} f_c(x) &= \frac{\log x}{x^c} \\ &= x^{-\frac{c}{2}}\cdot\frac{\log x}{x^{\frac{c}{2}}} \\ &= x^{-\frac{c}{2}}f_{\frac{c}{2}}(x) \end{aligned}$$

となる。そして、 $c>0$ より、 $x>1$ の範囲では $\log x>0, x^c>0$ であるから、

$$f_c(x)>0\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{1}$$

である。また、上の結果より $f_c(x)\leq\frac{1}{ec}$ であり、 c を $\frac{c}{2}$ に置き換えると $f_{\frac{c}{2}}(x)\leq\frac{2}{ec}$ である。

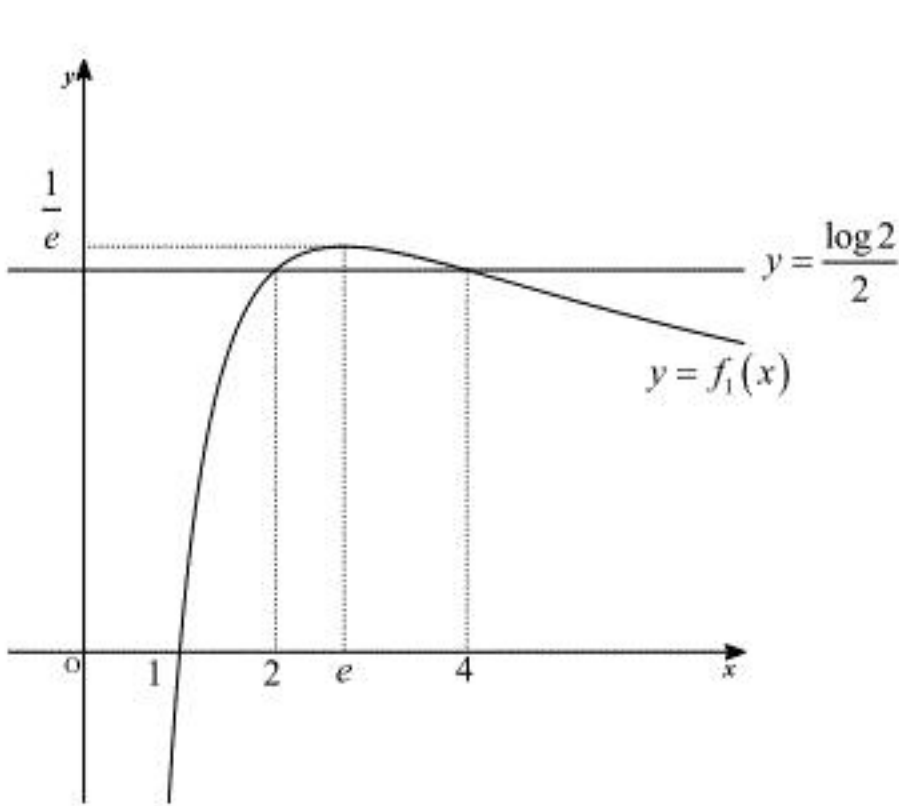
$x>1$ の範囲では $x^{-\frac{c}{2}}>0$ が成り立つから

$$\begin{aligned} x^{-\frac{c}{2}}f_{\frac{c}{2}}(x) &\leq \frac{2}{ec}x^{-\frac{c}{2}} \\ f_c(x) &\leq \frac{2}{ec}x^{-\frac{c}{2}}\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{2} \end{aligned}$$

である。 $c>0$ より $-\frac{c}{2}<0$ であるから、 $\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{2}{ec}x^{-\frac{c}{2}}=0$ となる。したがって、①、②よりはさみ

うちの定理から $\lim_{x\rightarrow\infty}f_c(x)=0$ が示された。

〔2〕



〔1〕の議論を利用する。 $0<s<t$ より $s'>0, t'>0$ であるから、条件式 $s'=t'$ に対して両辺の自然対数をとると

$$\begin{aligned} s' &= t' \\ \Leftrightarrow t\log s &= s\log t \\ \Leftrightarrow \frac{\log s}{s} &= \frac{\log t}{t} \\ \Leftrightarrow f_1(s) &= f_1(t) \end{aligned}$$

である。上の図より、正の実数に対し、 $t>s$ かつ $f_1(s)=f_1(t)(\Leftrightarrow s'=t')$ を満たす t が存在するための必要十分条件は、 $1<s<e$ である。よって、自然数 a, b について $b>a$ かつ $a^b=b^a$ が成り立つとき $1<a<e$ であり、 $2<e<3$ より条件を満たす自然数 a の候補は $a=2$ に限られる。 $a=2$ のとき

$$\begin{aligned} 2^b &= b^2 \\ \Leftrightarrow f_1(2) &= f_1(b) \\ \Leftrightarrow f_1(b) &= \frac{\log 2}{2} \end{aligned}$$

を満たす自然数 b は、上の図より $b=4$ に限られる。以上より、求める自然数の組は、 $(a, b)=(2, 4)$ ですべてである。

〔解答〕

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ
[1]	$\frac{1}{t}$	$\frac{\pi}{2}-t$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{2}{\pi}$	$-\frac{2+\pi i}{\sqrt{4+\pi^2}}$
	キ	ク	ケ	コ	サ	
[2]	$\frac{1}{5}$	$\frac{-3+4i}{5}$	$\frac{61}{125}$	$-\frac{96}{125}$	$\frac{89}{125}$	

〔解説〕

[1]

$w = \frac{\sin t}{t} + i \frac{\cos t}{t}$ であることから,

$$\begin{aligned} w &= \frac{\sin t}{t} + i \frac{\cos t}{t} \\ &= \frac{1}{t} \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} - t \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - t \right) \right) \end{aligned}$$

であり, その時の偏角 $\theta = \frac{\pi}{2} - t$ は $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$ であることから $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0$ である。これは

$-\pi < \theta \leq \pi$ を満たす。また, $t = \frac{\pi}{2}$ のとき w は

$$\begin{aligned} w &= \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} + i \frac{\cos \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

となる。ここで複素数平面を実軸を x 軸, 虚軸を y 軸の平面とみなすと

$$x = \frac{\sin t}{t}, y = \frac{\cos t}{t}$$

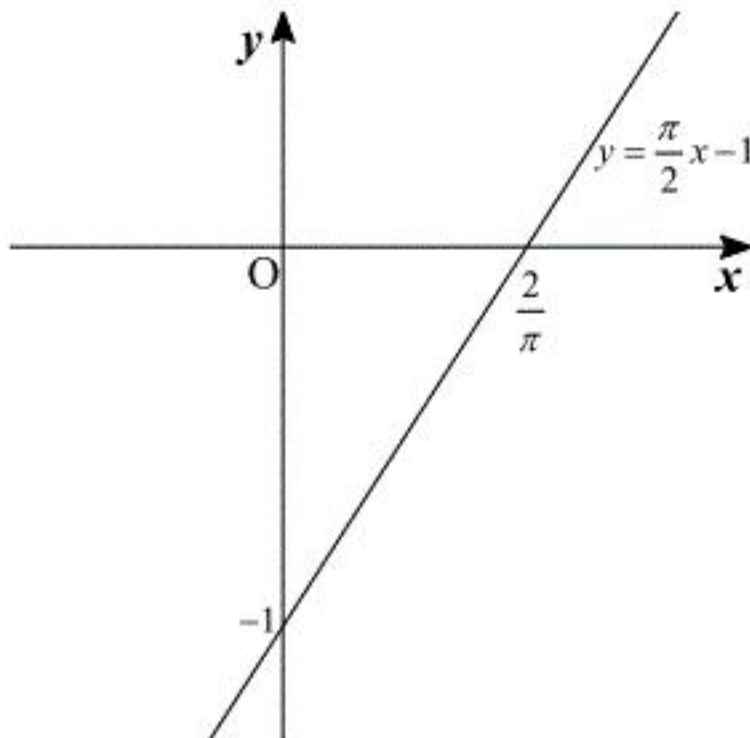
で表される。ここで

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \\ &= \frac{-t \sin t - \cos t}{t^2} \cdot \frac{t^2}{t \cos t - \sin t} \\ &= -\frac{t \sin t + \cos t}{t \cos t - \sin t} \end{aligned}$$

であることから, $t = \frac{\pi}{2}$ のときの曲線 C の接線の x, y 座標における傾きは

$$-\frac{\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

である。以上のことから曲線 C の $t = \frac{\pi}{2}$ における接線は以下のようになる。



このとき, $z = \frac{2}{\pi} + \alpha s$ とおくと, $|\alpha| = 1$ かつこの直線方向ベクトルが $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ であることより,

$$\begin{aligned} \alpha &= \pm \frac{1 + \frac{\pi}{2}i}{\left|1 + \frac{\pi}{2}i\right|} \\ &= \pm \frac{2 + \pi i}{\sqrt{4 + \pi^2}} \end{aligned}$$

である。 z が純虚数をとるとき上図より $z = -i$ であり, このとき $s > 0$ であることから $\boxed{\text{カ}}$ に入る複素数は $-\frac{2+\pi i}{\sqrt{4+\pi^2}}$ となる。

[2]

$z = a + bi$ より,

$$\begin{aligned} z^2 + 3z\bar{z} + \bar{z}^2 &= 5 \\ \Leftrightarrow (a+bi)^2 + 3(a+bi)(\overline{a+bi}) + (\overline{a+bi})^2 &= 5 \\ \Leftrightarrow 2(a^2 - b^2) + 3(a^2 + b^2) &= 5 \\ \Leftrightarrow 5a^2 + b^2 &= 5 \\ \Leftrightarrow a^2 + \frac{1}{5}b^2 &= 1 \end{aligned}$$

である。また, 複素数 z, z' は直線 OQ に関して対称なので,

$$\overline{\left(\frac{z}{q}\right)} = \frac{z'}{q}$$

が成立する。したがって

$$\begin{aligned} z' &= \frac{q}{q} \bar{z} \\ &= \frac{1+2i}{1-2i} \bar{z} \\ &= \frac{-3+4i}{5} \bar{z} \end{aligned}$$

である。さらに $\bar{z} = a - bi$ を用いて変形すると

$$\begin{aligned} z' &= \left(\frac{-3+4i}{5}\right) \cdot (a - bi) \\ &= \frac{-3a+4b}{5} + \frac{4a+3b}{5}i \end{aligned}$$

となる。よって, $z' = c + di$ (c, d は実数) とおくと, 複素数の相等より,

$$\begin{aligned} \begin{cases} c = \frac{-3a+4b}{5} \\ d = \frac{4a+3b}{5} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-3c+4d}{5} \\ b = \frac{4c+3d}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

が成り立つ。これを $a^2 + \frac{1}{5}b^2 = 1$ に代入して,

$$\begin{aligned} a^2 + \frac{1}{5}b^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{-3c+4d}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{4c+3d}{5}\right)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{61c^2 - 96cd + 89d^2}{125} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{61}{125}c^2 + \left(-\frac{96}{125}\right)cd + \frac{89}{125}d^2 &= 1 \end{aligned}$$

となる。

【解答】

〔1〕	ア	イ	ウ				
	$\frac{2v-4}{2v-3}$	$\frac{3v-4}{2v-3}$	$-\frac{3v+4}{2v+3}$				
〔2〕	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
	17	-24	-12	$\pm\sqrt{2}$	$17-12\sqrt{2}$	$17+12\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2}, 0)$

【解説】

〔1〕

点 P(v, w) は楕円 E 上にあるので、

$$\frac{v^2}{2}+w^2=1\Leftrightarrow w^2=1-\frac{v^2}{2}\qquad\cdots\cdots\textcircled{1}$$

が成立する。点 S($((1-t)v+t, (1-t)w)$) が楕円 E 上にあるとき、点 S の座標を楕円の方程式に代

入すると、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\{(1-t)v+t\}^2+\{(1-t)w\}^2&=1\\ \Leftrightarrow\frac{1}{2}(1-t)^2v^2+t(1-t)v+\frac{1}{2}t^2+(1-t)^2\left(1-\frac{v^2}{2}\right)&=1\quad(\because\textcircled{1})\\ \Leftrightarrow\left(v-\frac{3}{2}\right)t^2-(v-2)t&=0\\ \Leftrightarrow t\{(2v-3)t-(2v-4)\}&=0\\ \Leftrightarrow t=0,\frac{2v-4}{2v-3}\end{aligned}$$

が導かれる。 $t=0$ のとき点 P と重なるので、 $t=\frac{2v-4}{2v-3}$ のとき楕円 E 上の点 P と異なる点とな

る。また、 t が実数全体を動くとき点 S は直線 PA 上を動くので、直線 PA と楕円 E との共有点

のうち、点 P と異なる点の x 座標は、 $t=\frac{2v-4}{2v-3}$ のときの点 S の x 座標である。即ち、

$$(1-t)v+t=\left(1-\frac{2v-4}{2v-3}\right)v+\frac{2v-4}{2v-3}=\frac{3v-4}{2v-3}$$

となる。更に、点 T を直線 PB 上の座標とすると、実数 s を用いて

$$\overline{\mathrm{OT}}=(1-s)\overline{\mathrm{OP}}+s\overline{\mathrm{OB}}=\{(1-s)v-s,(1-s)w\}$$

と表せるから、点 T の座標は $\{(1-s)v-s,(1-s)w\}$ である。これを楕円の方程式に代入すると、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\{(1-s)v-s\}^2+\{(1-s)w\}^2&=1\\ \Leftrightarrow\frac{1}{2}(1-s)^2v^2-s(1-s)v+\frac{1}{2}s^2+(1-s)^2\left(1-\frac{v^2}{2}\right)&=1\quad(\because\textcircled{1})\\ \Leftrightarrow\left(v+\frac{3}{2}\right)s^2-(v+2)s&=0\\ \Leftrightarrow s\{(2v+3)s-(2v+4)\}&=0\\ \Leftrightarrow s=0,\frac{2v+4}{2v+3}\end{aligned}$$

が導かれる。 $s=0$ のとき点 P と点 T は一致する。したがって、直線 PB と楕円 E の共有点の

うち、点 P と異なる点の x 座標は、 $s=\frac{2v+4}{2v+3}$ のときの点 T の x 座標であり、

$$(1-s)v-s=\left(1-\frac{2v+4}{2v+3}\right)v-\frac{2v+4}{2v+3}=-\frac{3v+4}{2v+3}$$

である。

〔2〕

点 Q_n の x 座標を x_n としたとき、点 R_n の x 座標を x_n' とすると、〔1〕

イ

の結果を用いて

$$x_n'=\frac{3x_n-4}{2x_n-3}\qquad\cdots\cdots\textcircled{2}$$

と表すことができる。また、点 Q_{n+1} の x 座標 x_{n+1} は、〔1〕

ウ

の結果と②式を用いて、

$$x_{n+1}=-\frac{3x_n'+4}{2x_n'+3}=-\frac{3\cdot\frac{3x_n-4}{2x_n-3}+4}{2\cdot\frac{3x_n-4}{2x_n-3}+3}=-\frac{3(3x_n-4)+4(2x_n-3)}{2(3x_n-4)+3(2x_n-3)}=\frac{17x_n+(-24)}{-12x_n+17}$$

となる。ここで、 Q_1 が x 軸上にあるとき、 Q_1 の x 座標は $x_1=\pm\sqrt{2}$ である。また、 Q_1 が x 軸上にないとき、すなわち $x_1\neq\pm\sqrt{2}$ のとき、

$$\begin{aligned}x_{n+1}+\sqrt{2}&=\frac{17x_n+(-24)}{-12x_n+17}+\sqrt{2}=\frac{17x_n+(-24)+\sqrt{2}(-12x_n+17)}{-12x_n+17}=\frac{17-12\sqrt{2}}{-12x_n+17}(x_n+\sqrt{2})\\ x_{n+1}-\sqrt{2}&=\frac{17x_n+(-24)}{-12x_n+17}-\sqrt{2}=\frac{17x_n+(-24)-\sqrt{2}(-12x_n+17)}{-12x_n+17}=\frac{17+12\sqrt{2}}{-12x_n+17}(x_n-\sqrt{2})\end{aligned}$$

となる。ゆえに $a_n=\frac{x_n+\sqrt{2}}{x_n-\sqrt{2}}$ とおくと、上の結果を用いて

$$a_{n+1}=\frac{x_{n+1}+\sqrt{2}}{x_{n+1}-\sqrt{2}}=\frac{\frac{17-12\sqrt{2}}{-12x_n+17}(x_n+\sqrt{2})}{\frac{17+12\sqrt{2}}{-12x_n+17}(x_n-\sqrt{2})}=\frac{17-12\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}a_n\qquad\cdots\cdots\textcircled{3}$$

が成立する。ここで、

$$\frac{17-12\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}=\frac{1}{(17+12\sqrt{2})^2}$$

であるから、 $\left|\frac{17-12\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}\right|<1$ である。③より、 $\{a_n\}$ は初項 a_1 、公比 $\frac{17-12\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}$ の等比数列であるから

$$a_n=\left(\frac{17-12\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}\right)^{n-1}a_1$$

である。よって、 $\left|\frac{17-12\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}\right|<1$ より、 $a_1=\frac{x_1+\sqrt{2}}{x_1-\sqrt{2}}$ であるから、 Q_1 が x 軸上にないとき、すな

わち $x_1\neq\pm\sqrt{2}$ のとき、 $a_1\neq0$ である。これらと③より、

$$\begin{aligned}\lim_{n\rightarrow\infty}a_n&=0\\ \Leftrightarrow\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{x_n+\sqrt{2}}{x_n-\sqrt{2}}&=0\\ \Leftrightarrow\lim_{n\rightarrow\infty}x_n&=-\sqrt{2}\end{aligned}$$

となる。 x_n が $-\sqrt{2}$ に近づくとき、それに伴い点 Q_n の y 座標は 0 に近づく。よって、点の列

$Q_1, Q_2, \cdots$ は座標が $(-\sqrt{2}, 0)$ の点に限りなく近づく。

【解答】

[1]	ア	イ	ウ	エ
	$\frac{1}{2}$	3	$0 < x < \frac{1}{6}, \frac{5}{6} < x < 1$	$x \leq 0, \frac{1}{6} \leq x \leq \frac{5}{6}, 1 \leq x$
	オ	カ	キ	ク
	$\frac{1}{12}, \frac{11}{12}$	3	2^{n-1}	3
[2]	ケ	コ	サ	シ
	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$	$\frac{9}{4}$

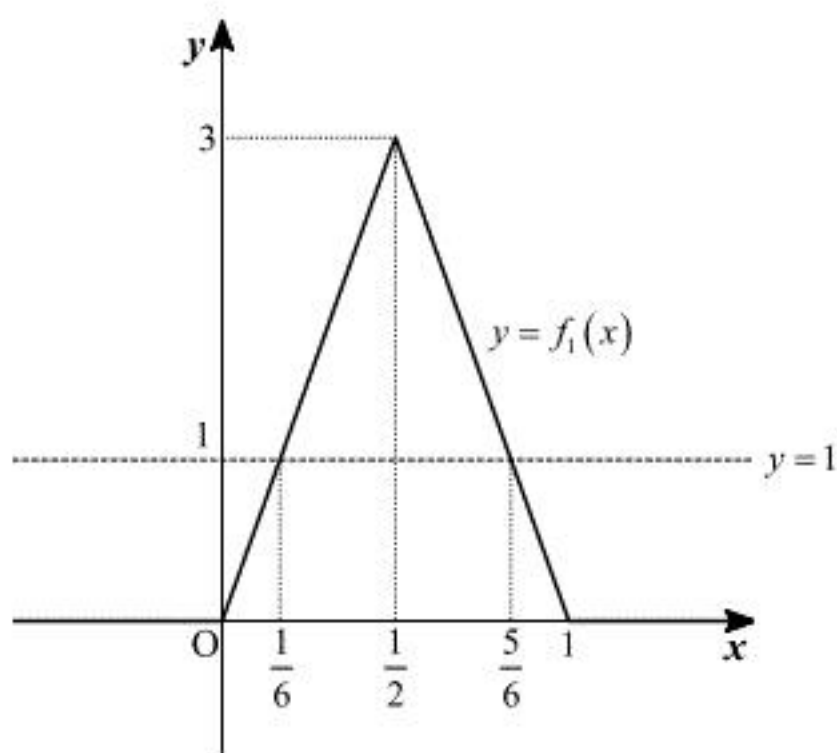
【解説】

[1]

$0 < x < 1$ のとき、関数 $f_1(x)$ から絶対値を消去すると

$$f_1(x) = \begin{cases} 3 - (3 - 6x) = 6x & (0 < x < \frac{1}{2} \text{ のとき}) \\ 3 - (6x - 3) = 6 - 6x & (\frac{1}{2} \leq x < 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となり、図示すると以下ようになる。



図より、関数 $f_1(x)$ は $x = \frac{1}{2}$ において最大値 3 をとる。また、 $0 < f_1(x) < 1$ となるような x の値

の範囲は $0 < x < \frac{1}{6}$ または $\frac{5}{6} < x < 1$ である。 $f_2(x) = f_1(f_1(x)) = 0$ となるのは、 x が $0 < f_1(x) < 1$

を満たさない場合であるから、そのような x の値の範囲は $x \leq 0$ または $\frac{1}{6} \leq x \leq \frac{5}{6}$ または 1

$\leq x$ である。ここで、 $f_2(x) = f_1(f_1(x))$ は $f_1(x) = \frac{1}{2}$ となる x において最大値 3 をとる。

[1] $0 < x < \frac{1}{6}$ のとき

$$f_1(x) = 6x \text{ より、} x = \frac{1}{12} \text{ において } f_1\left(\frac{1}{12}\right) = \frac{1}{2} \text{ となる。}$$

[2] $\frac{5}{6} < x < 1$ のとき

$$f_1(x) = 6 - 6x \text{ より、} x = \frac{11}{12} \text{ において } f_1\left(\frac{11}{12}\right) = \frac{1}{2} \text{ となる。}$$

以上[1],[2]より、 $x = \frac{1}{12}, \frac{11}{12}$ において $f_2(x)$ は最大値 3 をとる。ここで、 k を $0 < k < 1$ を満たす

実数とし、 $f_0(x) = x$ とすると、 $f_n(x) = f_1(f_{n-1}(x)) = k$ を満たす $f_{n-1}(x)$ の値は $0 < f_{n-1}(x) < 1$

の範囲に 2 つ存在する。この操作を $n=1$ まで繰り返すことで、 $f_n(x) = k$ を満たす x は

$0 < x < 1$ の範囲に 2^n 個存在することが分かる。よって、 $n \geq 3$ のとき、 $f_{n-1}(x) = \frac{1}{2}$ を満たす x

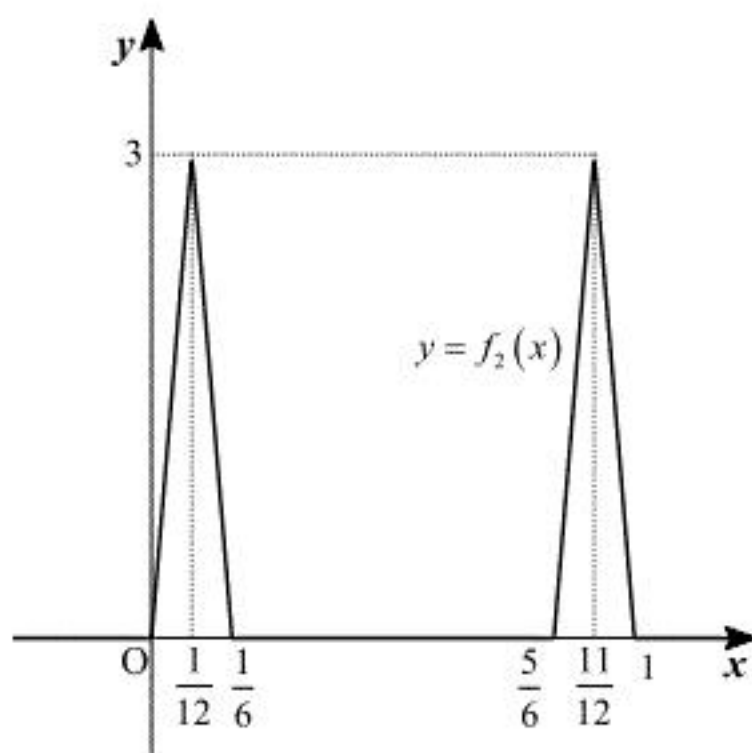
は $0 < x < 1$ の範囲に 2^{n-1} 個存在し、それらの点において $f_n(x) = f_1(f_{n-1}(x))$ は最大値 3 をとる。

[2]

[1] の図より、

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 = \frac{3}{2}$$

である。また、関数 $f_2(x)$ のグラフを図示すると次のようになる。



上図より、関数 $f_2(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた部分は、関数 $f_1(x)$ のグラフと x 軸で囲まれ

た部分を x 軸方向に $\frac{1}{6}$ 倍して得られる図形 2 個からなる。したがって、

$$S_2 = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot S_1 = \frac{1}{2}$$

である。同様に、自然数 n について

$$S_{n+1} = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot S_n = \frac{1}{3} S_n$$

が成り立つから、3 以上の自然数 n について

$$S_n = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

である。したがって、 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ は初項 $S_1 = \frac{3}{2}$ 、公比 $\frac{1}{3}$ の無限等比級数であり、公比 $\frac{1}{3} < 1$ より収束

する。また、その和は

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{9}{4}$$

である。