

【解答】								
〔1〕	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
	2	$2\sqrt{3}$	4	$\frac{\pi}{6}$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
〔2〕	ケ	コ	サ	シ				
	$\left(2, \frac{1}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{37}}{3}$	$-6x + \frac{37}{3}$	8				
〔3〕	ス	セ	ソ	タ				
	-1	7	$\frac{7}{2}$	7				

※オとカは順不同、キとクは順不同

【解説】

〔1〕
 $P=2x^2+4\sqrt{3}xy-2y^2$ に $x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$ ($0\leq\theta<2\pi$) を代入し、半角の公式、2倍角の公式を用いて整理すると

$$\begin{aligned} P &= 2\cos^2\theta+4\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta-2\sin^2\theta \\ &= 2\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}+2\sqrt{3}\sin 2\theta-2\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2} \\ &= 2\cos 2\theta+2\sqrt{3}\sin 2\theta \\ &= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right) \\ &= 4\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

となる。 $0\leq\theta<2\pi$ より $\frac{\pi}{6}\leq 2\theta+\frac{\pi}{6}<\frac{25}{6}\pi$ であるから、 P が最大になるのは

$$2\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}, \frac{5}{2}\pi\Leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{6}, \frac{7}{6}\pi$$

のときであり、それぞれの θ に対応する (x, y) は順に $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ となる。また、 P が最小になるのは

$$2\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{3}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi\Leftrightarrow\theta=\frac{2}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$$

のときであり、それぞれの θ に対応する (x, y) は順に $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ となる。

〔2〕

放物線 $C_1:y=-\frac{3}{2}x^2+\frac{19}{3}$ と円 $C_2:x^2+y^2=r^2$ が異なる2点 P_1 と P_2 で接しているとき、これらの座標と r の値を求める。円 C_2 上の点 P の座標を $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ ($0\leq\theta<2\pi, r>0$) とおくと、点 P が放物線 C_1 上にあるための条件は

$$r\sin\theta=-\frac{3}{2}r^2\cos^2\theta+\frac{19}{3}\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{1}$$

である。次に、点 P における C_1, C_2 の接線の傾きが一致するための条件を求める。放物線 C_1 を表す2次関数の導関数は

$$y'=-3x$$

であるから、放物線 C_1 上の点 $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ における接線方向ベクトルを $\vec{d}$ とすると、

$$\vec{d}=(1, -3r\cos\theta)$$

である。また、円 C_2 上の点 $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ における接線は

$$\begin{aligned} (r\cos\theta)x+(r\sin\theta)y &= r^2 \\ \therefore(\cos\theta)x+(\sin\theta)y &= r \end{aligned}$$

であるから、この接線の法線ベクトルを $\vec{n}$ とすると、

$$\vec{n}=(\cos\theta, \sin\theta)$$

である。したがって、点 P における C_1, C_2 の接線の傾きが一致するとき、 $\vec{d}\perp\vec{n}$ が成り立つから、求める条件は

$$\begin{aligned} \vec{d}\cdot\vec{n} &= 0 \\ \Leftrightarrow(1, -3r\cos\theta)\cdot(\cos\theta, \sin\theta) &= 0 \\ \Leftrightarrow\cos\theta-3r\sin\theta\cos\theta &= 0 \\ \Leftrightarrow\cos\theta(1-3r\sin\theta) &= 0 \\ \Leftrightarrow\cos\theta=0\text{ または } \sin\theta &= \frac{1}{3r} \qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{2} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\cos\theta=0$ のとき、点 P は y 軸上に存在するから、 y 軸対称である C_1, C_2 が異なる2点で接している場合は、それら2点は点 P と一致しない。したがって、①、②より

$$\begin{aligned} \begin{cases} r\sin\theta &= -\frac{3}{2}r^2\cos^2\theta+\frac{19}{3} \\ \sin\theta &= \frac{1}{3r} \end{cases} \\ \Leftrightarrow\begin{cases} \frac{1}{3} &= -\frac{3}{2}\left(r^2-\frac{1}{9}\right)+\frac{19}{3} \\ \sin\theta &= \frac{1}{3r} \end{cases} \\ \Leftrightarrow\begin{cases} r^2 &= \frac{37}{9} \\ \sin\theta &= \frac{1}{3r} \end{cases} \\ \therefore(r, \sin\theta) &= \left(\frac{\sqrt{37}}{3}, \frac{1}{\sqrt{37}}\right) (\because r>0) \end{aligned}$$

となる。ここで、 P_1 の x 座標は P_2 の x 座標より大きいことも合わせて、

$$\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{37}}\right)^2}=\frac{6}{\sqrt{37}}$$

であるから、

$$P_1\left(2, \frac{1}{3}\right), P_2\left(-2, \frac{1}{3}\right)$$

である。また、 l_1 は円 $C_2:x^2+y^2=\frac{37}{9}$ の点 P_1 における接線であるから、その方程式は、

$$2x+\frac{1}{3}y=\frac{37}{9}\Leftrightarrow y=-6x+\frac{37}{3}$$

となる。 C_1 と l_1, l_2 に囲まれる図形は上図の斜線部に等しいから、その面積を S とする。このとき、 y 軸に関する対称性より、上図の斜線部のうち $x\geq 0$ にある部分の面積は $\frac{S}{2}$ となる。したがって

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &= \int_0^2\left\{\left(-6x+\frac{37}{3}\right)-\left(-\frac{3}{2}x^2+\frac{19}{3}\right)\right\}dx \\ &= \int_0^2\left(\frac{3}{2}x^2-6x+6\right)dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^3-3x^2+6x\right]_0^2 \\ &= 4-12+12 \\ &= 4 \\ \therefore S &= 8 \end{aligned}$$

である。

〔3〕

与えられた x の方程式

$$ax^2+(a+7)x+(2a-7)=0\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{3}$$

について $a=0$ のとき、実数解は $7x-7=0\Leftrightarrow x=1$ の1つのみである。 $a\neq 0$ のとき、③は x の2次方程式となる。その判別式を D_2 とおくと、③が異なる2つの実数解を持つ条件は

$$\begin{aligned} D_2 &> 0 \\ \Leftrightarrow(a+7)^2-4a(2a-7) &> 0 \\ \Leftrightarrow-7a^2+42a+49 &> 0 \\ \Leftrightarrow a^2-6a-7 &< 0 \\ \Leftrightarrow(a+1)(a-7) &< 0 \\ \therefore -1 &< a < 7 \end{aligned}$$

であり、 $a\neq 0$ と合わせると、方程式②が異なる2つの実数解を持つ条件は

$$-1<a<0, 0<a<7\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{4}$$

となる。次に a が④を満たすとき、 x の2次方程式⑤の左辺を $f(x)$ とおくと

$$f(x)=a\left(x+\frac{a+7}{2a}\right)^2+\frac{7(a+1)(a-7)}{4a}$$

となるから、放物線 $y=f(x)$ の軸は $x=-\frac{a+7}{2a}$ である。方程式 $f(x)=0$ の実数解は、 $y=f(x)$ と x 軸の共有点の x 座標と一致するから、求める条件は上図のように $y=f(x)$ と x 軸が異なる2つの共有点をもち、それらがともに $-3<x<3$ の範囲にあるための条件と一致する。これは、

$$\begin{aligned} f(-3) &= 8a-28=8\left(a-\frac{7}{2}\right) \\ f(3) &= 14a+14=14(a+1) \end{aligned}$$

に注意すると、

$$\begin{aligned} \begin{cases} -1< a < 0, 0 < a < 7 \\ f(-3) > 0 \\ f(3) > 0 \\ -3 < -\frac{a+7}{2a} < 3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow\begin{cases} -1 < a < 0, 0 < a < 7 \\ a > \frac{7}{2} \\ a > -1 \\ -3 < -\frac{a+7}{2a} < 3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow\begin{cases} \frac{7}{2} < a < 7 \\ -3 < -\frac{a+7}{2a} < 3 \end{cases} \qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{5} \end{aligned}$$

となる。 $\frac{7}{2}<a<7$ のもとで、

$$\begin{aligned} -3 < -\frac{a+7}{2a} < 3 \\ \Leftrightarrow 6a > a+7 > -6a \\ \Leftrightarrow\begin{cases} 6a > a+7 \\ a+7 > -6a \end{cases} \\ \Leftrightarrow\begin{cases} a > \frac{7}{5} \\ a > -1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow a > \frac{7}{5} \end{aligned}$$

となるから、方程式②が異なる2つの実数解をもち、それらがともに $-3<x<3$ の範囲にあるための条件は、

$$\textcircled{5}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow\begin{cases} \frac{7}{2} < a < 7 \\ a > \frac{7}{5} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \frac{7}{2} < a < 7 \end{aligned}$$

である。

II

〔解答〕

〔1〕	ア	イ		
	1716	336		
〔2〕	ウ	エ	オ	カ
	10	2	54	5

〔解説〕

〔1〕

北に7本、東西に8本の格子状の道を通って点Oから点Kまで行く最短経路の数は、13個の中から北に進む道路を7つ、東へ進む道路を6つ選ぶ組み合わせと同数であるから、 ${}_{13}C_6=1716$ より、1716通りである。また、点P、Qを通って点Oから点Kへ行く経路は、OからPに行くのに ${}_8C_3$ 通りで、PからQに行くのに ${}_2C_1$ 通り、QからKに行くのは ${}_3C_1$ 通りであるから、

$${}_8C_3 \cdot {}_2C_1 \cdot {}_3C_1 = 56 \cdot 2 \cdot 3 = 336$$

より、336通りである。

〔2〕(a)

Aの次に進む点はDまたはFである。

〔1〕Dに進むとき

次に進む点はB、E、Fである。

〔i〕点Bに進むとき

この時点で終了するので1通りである。

〔ii〕点Eに進むとき

次にBしか進めないので1通りである。

〔iii〕点Fに進むとき

F-C-E-B

F-E-B

の2通りである。

以上〔i〕,〔ii〕,〔iii〕より,〔1〕の場合は4通りである。

〔2〕Fに進むとき

次に進むのはC、D、Eである。

〔i〕点Cに進むとき

C-E-B

C-E-D-B

の2通りである。

〔ii〕点Dに進むとき

D-B

D-E-B

の2通りである。

〔iii〕点Eに進むとき

E-B

E-D-B

の2通りである。

以上〔i〕,〔ii〕,〔iii〕より〔2〕の場合は6通りである。

よって、以上〔1〕,〔2〕よりAからBに進む経路は全部で10通りである。また、点Aから点Fの各点をすべて通過する経路は

A-D-F-C-E-B

A-F-C-E-D-B

の2通りである。

(b)

点Aの次に進むのはD、Fである。

〔1〕点Dに進むとき

この場合、点Dから点Bに進む経路は、点Fを通らない経路と、点Fを通る経路がある。前者は(a)の結果より10通りある。ここで、後者の経路を考える。点Fから次に進むのは点Eまたは点Cであるが、点Cを通ったときも次に進むのは点Eであるから、点Eから点Bへの経路を考える。(a)と同様に場合分けすると

E-H-B

E-H-G-B

E-H-I-G-B

E-I-H-B

E-I-H-G-B

E-I-G-B

E-I-G-H-B

の7通りある。よって,〔1〕の場合は、 $10+7 \times 2=24$ 通りである。

〔2〕点Fに進むとき

A-F-Dと進むときは(a)と同様に10通りあり、A-F-Eと進むときと、A-F-C-Eと進むときも、図の対称性を考えると、(a)と同様に、それぞれ10通りあるから、〔2〕の場合は $10+10 \times 2=30$ 通りである。

以上〔1〕,〔2〕より、AからBへの経路は全部で $24+30=54$ 通りある。また、AからIの全ての点を通る経路は

A-D-F-C-E-H-I-G-B

A-D-F-C-E-I-H-G-B

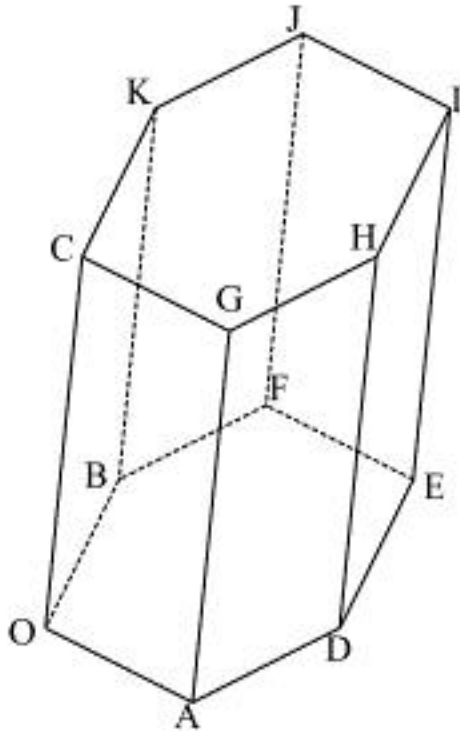
A-D-F-C-E-I-G-H-B

A-F-C-E-H-I-D-G-B

A-F-C-E-I-D-G-H-B

の5通りである。

III



[1]

$$\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BK} = \vec{b} + \vec{c}$$

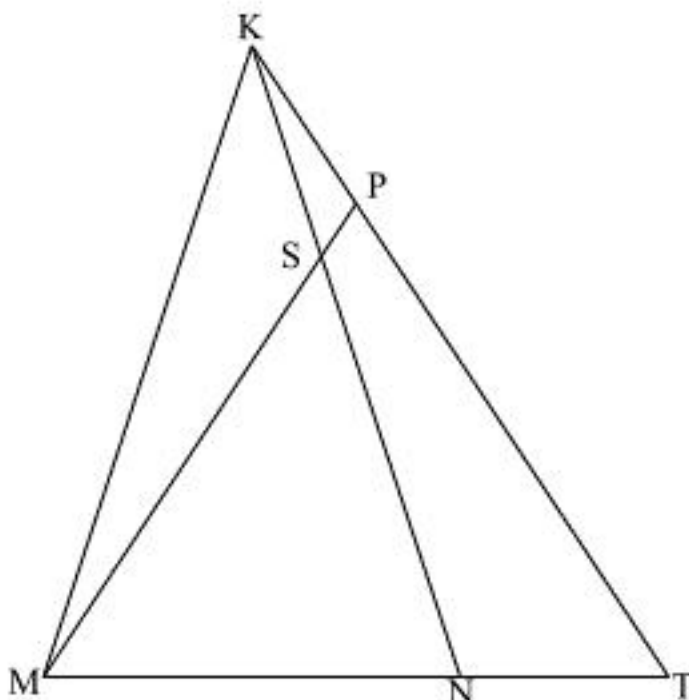
$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BF} = \vec{b} + \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HI} = 2\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b} + \vec{c}$$

となる。

$$(\text{答}) \begin{cases} \overrightarrow{OK} = \vec{b} + \vec{c} \\ \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b} \\ \overrightarrow{ON} = 2\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b} + \vec{c} \end{cases}$$

[2]



点Sは線分KNを1:2に内分する点であるから、

$$\overrightarrow{MS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MK} + \frac{1}{3}\overrightarrow{MN}$$

となる。また、M, S, Pは同一直線上にあるから、 $\overrightarrow{MP}$ は、実数 x を用いて、

$$\overrightarrow{MP} = x\overrightarrow{MS}$$

と表すことができ、点Tは線分MNを3:1に外分する点であるから、

$$\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MT}$$

と表すことができる。これより、

$$\overrightarrow{MP} = \frac{2x}{3}\overrightarrow{MK} + \frac{2x}{9}\overrightarrow{MT}$$

となる。ここで、点Pは直線KT上の点であることから、

$$\frac{2x}{3} + \frac{2x}{9} = 1$$

$$\therefore x = \frac{9}{8}$$

が得られる。よって、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MP} &= \frac{3}{4}\overrightarrow{MK} + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{MN}\right) \\ &= \frac{3}{4}\overrightarrow{MK} + \frac{3}{8}\overrightarrow{MN} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{MP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{MK} + \frac{3}{8}\overrightarrow{MN}$$

[3]

[1] , [2] より、 $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表すと、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OM} + \frac{3}{4}(\overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OM}) + \frac{3}{8}(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}) \\ &= -\frac{1}{8}\overrightarrow{OM} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OK} + \frac{3}{8}\overrightarrow{ON} \\ &= -\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}\right) + \frac{3}{4}(\vec{b} + \vec{c}) + \frac{3}{8}\left(2\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b} + \vec{c}\right) \\ &= \frac{11}{16}\vec{a} + \frac{9}{8}\vec{b} + \frac{9}{8}\vec{c} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OP} = \frac{11}{16}\vec{a} + \frac{9}{8}\vec{b} + \frac{9}{8}\vec{c}$$

[4]

3点A, P, Qは同一直線上にあるから、実数 y を用いて、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AQ} &= y\overrightarrow{AP} \\ &= y(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) \\ &= -\frac{5y}{16}\vec{a} + \frac{9y}{8}\vec{b} + \frac{9y}{8}\vec{c} \end{aligned}$$

と表すことができる。ここで、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AF} &= 2\vec{b} \\ \overrightarrow{AI} &= \vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c} \\ \overrightarrow{AJ} &= 2\vec{b} + \vec{c} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AJ} \\ \vec{b} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AF} \\ \vec{c} &= \overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AF} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AQ} &= -\frac{5y}{16}(\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AJ}) + \frac{9y}{8}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}\right) + \frac{9y}{8}(\overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AF}) \\ &= -\frac{9y}{16}\overrightarrow{AF} - \frac{5y}{16}\overrightarrow{AI} + \frac{23y}{16}\overrightarrow{AJ} \end{aligned}$$

が得られる。点Qは3点F, I, Jが作る平面上にあるから、

$$\begin{aligned} -\frac{9y}{16} - \frac{5y}{16} + \frac{23y}{16} &= 1 \\ \therefore y &= \frac{16}{9} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ} \\ &= \vec{a} + \left(-\frac{5}{9}\vec{a} + 2\vec{b} + 2\vec{c}\right) \\ &= \frac{4}{9}\vec{a} + 2\vec{b} + 2\vec{c} \end{aligned}$$

が得られる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OQ} = \frac{4}{9}\vec{a} + 2\vec{b} + 2\vec{c}$$