

【解答】

ア	$\frac{a^2}{3}$	イ	5	ウ	$-\frac{50}{27}+c$	エ	$-2+c$		
オ	2								
カ	$\frac{7\sqrt{3}}{3}$	キ	$10\sqrt{3}$	ク	$\sqrt{3}$	ケ	$\frac{49}{9}$		
コ	5	サ	26	シ	9	ス	③	セ	①
ソ	1	タ	2	チ	4	ツ	112604		

【解説】

(1)

$y=x^3+ax^2+bx+c$ について、 $y'=3x^2+2ax+b$ である。3 次関数 $y=x^3+ax^2+bx+c$ が極大値と極小値をもつ条件は、2 次方程式 $3x^2+2ax+b=0$ の判別式を D とすると、

「 $3x^2+2ax+b=0$ が異なる 2 つの実数解をもつこと」

$\Leftrightarrow \frac{D}{4} > 0$

$\Leftrightarrow a^2-3b > 0$

$\Leftrightarrow b < \frac{a^2}{3}$

である。 $a=4$ のとき、 b のみたすべき条件は $b < \frac{16}{3}$ であるから、 b の取り得る値は $b=1, 2, 3, 4, 5$ の 5 個ある。このうち、最大の b の値は $b=5$ である。このとき、3 次関数の方程式は $y=x^3+4x^2+5x+c$ であり、

$y'=3x^2+8x+5=(3x+5)(x+1)$

である。よって、 $y=x^3+4x^2+5x+c$ の増減表は以下のようになる。

x	...	$-\frac{5}{3}$	...	-1	...
y'	+	0	-	0	+
y	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって、 $x=-\frac{5}{3}$ のとき、極大値、

$\left(-\frac{5}{3}\right)^3+4\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)^2+5\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)+c=-\frac{50}{27}+c$

をとり、 $x=-1$ のとき、極小値、

$(-1)^3+4\cdot(-1)^2+5\cdot(-1)+c=-2+c$

をとる。方程式 $y=0$ が重解をもつとき、 c のみたすべき条件は

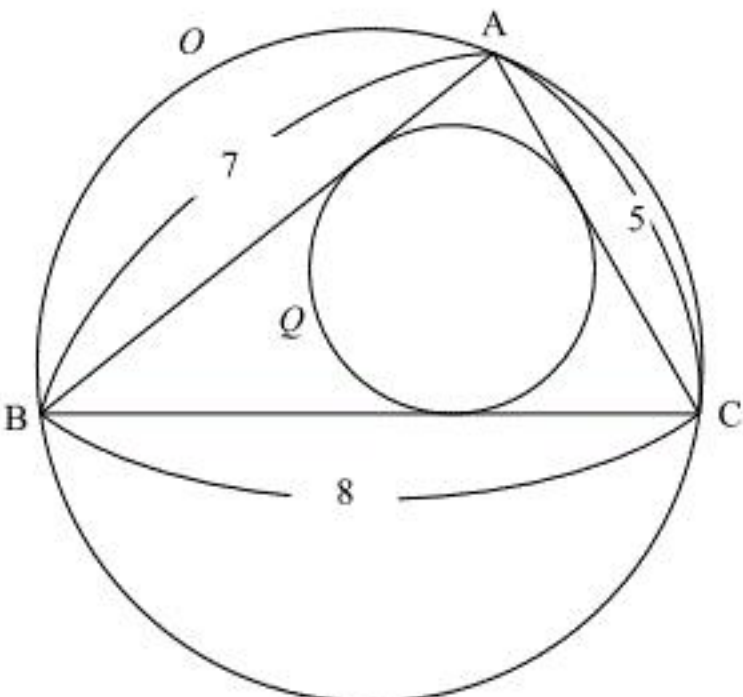
「極大値が 0 または極小値が 0」

$\Leftrightarrow -\frac{50}{27}+c=0$ または $-2+c=0$

である。 c は正の整数であるから、 $c=2$ である。

(2)

問題の図は以下のようになる。



$\triangle ABC$ に余弦定理を用いることにより、

$\cos \angle B=\frac{7^2+8^2-5^2}{2 \cdot 7 \cdot 8}=\frac{11}{14}$

である。ここで $0^\circ < \angle B < 180^\circ$ より $\sin \angle B > 0$ であるから、

$\sin \angle B=\sqrt{1-\left(\frac{11}{14}\right)^2}=\frac{5 \sqrt{3}}{14}$

である。ここで、円 O の半径を R とすると、正弦定理より、

$2 R=\frac{CA}{\sin \angle B}$

$\therefore R=\frac{7 \sqrt{3}}{3}$

であるから、 $OC=\frac{7 \sqrt{3}}{3}$ である。また、 $\triangle ABC$ の面積を S とすると

$S=\frac{1}{2} \cdot A B \cdot B C \cdot \sin \angle B=\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 8 \cdot \frac{5 \sqrt{3}}{14}=10 \sqrt{3}$

である。ここで、円 Q の半径を r とすると、

$\frac{1}{2} \cdot r \cdot(A B+B C+C A)=S$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot r \cdot(7+8+5)=10 \sqrt{3}$

$\therefore r=\sqrt{3}$

となる。よって、円 O と円 Q の半径の比は $\frac{7 \sqrt{3}}{3}:\sqrt{3}=\frac{7}{3}:1$ である。したがって、円 O の面積は

円 Q の面積の $\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{49}{9}$ 倍である。

(3) (a)

$20192=2^5 \times 631$ であるから $N_1=631$ である。 $25^2=625, 26^2=676$ であるから、 $N_1 \leq n^2$ をみたす最小の正の整数は 26 である。26 以下の素数は 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 の 9 個である。ここで、

$$\begin{aligned} 631 &=2 \cdot 315+1 \\ &=3 \cdot 210+1 \\ &=5 \cdot 126+1 \\ &=7 \cdot 90+1 \\ &=11 \cdot 57+4 \\ &=13 \cdot 48+7 \\ &=17 \cdot 37+2 \\ &=19 \cdot 33+4 \\ &=23 \cdot 27+10 \end{aligned}$$

であり、26 以下のどの素数でも割りきれないから、素数である。

(b)

$20192=8 \cdot 2524$ であるから、 $N_2=2524$ である。 $7^4=2401, 7^3=343, 7^2=49$ より、

$N_2=1 \times 7^4+0 \times 7^3+2 \times 7^2+3 \times 7+4$

である。よって、

$$\begin{aligned} 20192 &=(7+1)\left(7^4+2 \cdot 7^2+3 \cdot 7+4\right) \\ &=7^5+7^4+2 \cdot 7^3+(2+3) \cdot 7^2+(3+4) \cdot 7+4 \\ &=7^5+7^4+2 \cdot 7^3+6 \cdot 7^2+4 \end{aligned}$$

となる。よって、20192 を 7 進法で表記すると、 $112604_{(7)}$ となる。

II

〔解答〕

ア	3	イ	B	ウ	A	エ	C		
オ	7	カ	4	キ	2	ク	1	ケ	7

〔解説〕

〔1〕

A, B, C の都市をそれぞれ1回ずつ訪れて、ふたたび原点 O に戻る巡回ルートのは数は A, B, C の3つの並び替えの数に等しいが、あるルートとその逆の向きのルートは同じものと考えることから、求める場合の数は

$$\frac{3!}{2} = 3 \text{ (通り)}$$

である。この3通りのルートは

$$O \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow O, O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow O, O \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow O$$

である。 $OA + OB + OC + AB + BC + CA = L$ として、これら3通りのルートの移動距離を L を用いて表すことを考える。

〔1〕 $O \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow O$ のとき

移動距離は $OB + OC + AB + CA = L - (OA + BC)$ である。

〔2〕 $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow O$ のとき

移動距離は $OA + OC + AB + BC = L - (OB + CA)$ である。

〔3〕 $O \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow O$ のとき

移動距離は $OA + OB + BC + CA = L - (OC + AB)$ である。

$OA + BC, OB + CA, OC + AB$ をそれぞれ計算すると、

$$OA + BC = \sqrt{1^2 + 3^2} + \sqrt{\{2 - (-4)\}^2 + (-2 - 1)^2} = \sqrt{10} + 3\sqrt{5}$$

$$OB + CA = \sqrt{2^2 + (-2)^2} + \sqrt{(-4 - 1)^2 + (1 - 3)^2} = 2\sqrt{2} + \sqrt{29}$$

$$OC + AB = \sqrt{(-4)^2 + 1^2} + \sqrt{(2 - 1)^2 + (-2 - 3)^2} = \sqrt{17} + \sqrt{26}$$

となる。ここで、 $\sqrt{10} > 2\sqrt{2} = \sqrt{8}, \sqrt{45} = 3\sqrt{5} > \sqrt{29}$ より、

$$OA + BC = \sqrt{10} + 3\sqrt{5} > 2\sqrt{2} + \sqrt{29} = OB + CA$$

である。また、

$$(\sqrt{10} + 3\sqrt{5})^2 = 55 + 30\sqrt{2} = 55 + 2\sqrt{450}$$

$$(\sqrt{17} + \sqrt{26})^2 = 43 + 2\sqrt{442}$$

であるから、 $\sqrt{10} + 3\sqrt{5} > 0, \sqrt{17} + \sqrt{26} > 0$ より、

$$OA + BC = \sqrt{10} + 3\sqrt{5} > \sqrt{17} + \sqrt{26} = OC + AB$$

である。以上より、移動距離が最短のルートは $O \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow O$ である。

〔2〕

10 個の都市をそれぞれ1回ずつ訪れて、ふたたび原点 O に戻る巡回ルートのは数は10 個の異なるものの並び替えの数に等しいが、あるルートとその逆の向きのルートは同じものと考えることから、求める巡回ルートのは数は、

$$\frac{10!}{2} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2} = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^1 \text{ (通り)}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} \log_{10} (2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^1) &= 7 \log_{10} 2 + 4 \log_{10} 3 + 2 \log_{10} 5 + \log_{10} 7 \\ &= 7 \log_{10} 2 + 4 \log_{10} 3 + 2(1 - \log_{10} 2) + \log_{10} 7 \\ &= 2 + 5 \log_{10} 2 + 4 \log_{10} 3 + \log_{10} 7 \\ &= 2 + 5 \cdot 0.3010 + 4 \cdot 0.4771 + 0.8451 \\ &= 6.2585 \end{aligned}$$

であるから、 $2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^1$ は7桁の数である。

Ⅲ

[1]

3つの内積は

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2} = \frac{1+4-4}{2} = \frac{1}{2} \\ \vec{b} \cdot \vec{c} &= \frac{OB^2 + OC^2 - BC^2}{2} = \frac{4+4-9}{2} = -\frac{1}{2} \\ \vec{c} \cdot \vec{a} &= \frac{OC^2 + OA^2 - CA^2}{2} = \frac{4+1-4}{2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}, \vec{b} \cdot \vec{c} = -\frac{1}{2}, \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{1}{2}$$

[2]

$\overrightarrow{OH} = s\vec{a} + t\vec{b}$ とする。このとき、 $CH \neq 0$, $OA \neq 0$, $OB \neq 0$ であるから、

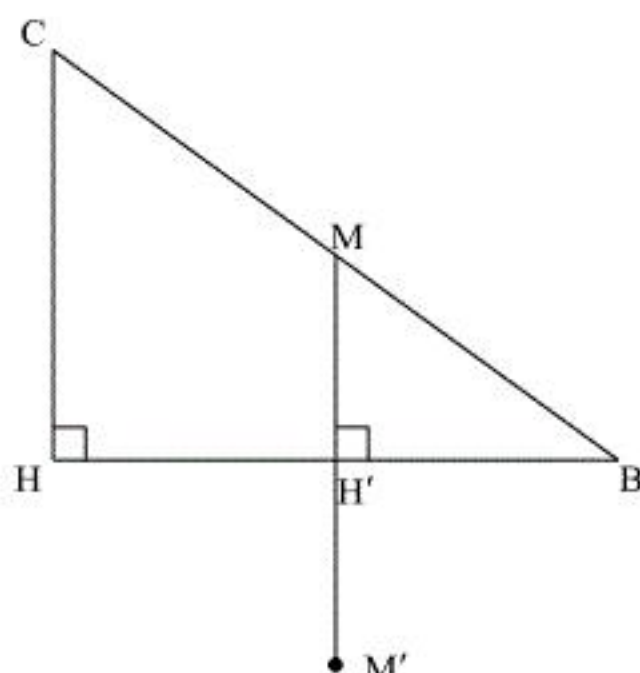
$$\begin{aligned}&\begin{cases} \overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{OB} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (s\vec{a} + t\vec{b} - \vec{c}) \cdot \vec{a} = 0 \\ (s\vec{a} + t\vec{b} - \vec{c}) \cdot \vec{b} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} s + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} = 0 \\ \frac{1}{2}s + 4t + \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \\ &\therefore (s, t) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{1}{5} \right)\end{aligned}$$

である。よって、 $\overrightarrow{OH} = \frac{3}{5}\vec{a} - \frac{1}{5}\vec{b}$ である。

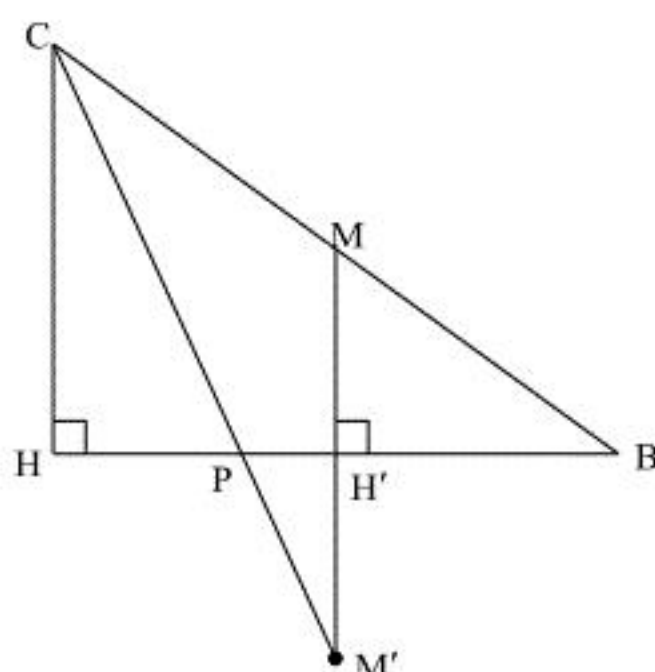
$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OH} = \frac{3}{5}\vec{a} - \frac{1}{5}\vec{b}$$

[3]

$\overrightarrow{CH} = \frac{3}{5}\vec{a} - \frac{1}{5}\vec{b} - \vec{c}$, $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ である。ここで、点 M を平面 OAB に対して対称移動した点を点 M' とし、MM' と平面 OAB の交点を点 H' とする。このとき、CH と MM' は平行であり図は以下ようになる。



上図より、点 H' は BH の中点で、 $CH = 2MH'$, $M'H' = MH'$ が成り立つ。ここで、 $CP + MP = CP + M'P$ であるから、 $CP + MP$ が最小になるとき、点 P は CM' と BH の交点である。このとき図は下図のようになる。



$\angle CPH = \angle M'PH'$, $\angle CHP = \angle M'H'P$ であり、 $CH : M'H' = 2 : 1$ であるから、 $\triangle CPH$ と $\triangle M'PH'$ は相似比が 2:1 である相似な三角形である。よって、 $HP : H'P = 2 : 1$ であり、点 H' は BH の中点であるから、 $HP : PH' : BH' = 2 : 1 : 3$ である。よって、 $HP : PB = 2 : (1+3) = 1 : 2$ である。以上より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OH} \\ &= \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{5}\vec{a} - \frac{1}{5}\vec{b} \right) \\ &= \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OP} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b}$$