

【解答】

ア	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	イ	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	ウ	$-\frac{2}{3}$	エ	-1
オ	$\frac{\pi}{6}$	カ	$\frac{5}{6}\pi$	キ	$2\sin^2\theta-3\sin\theta+2$		
ク	1	ケ	$\frac{7}{8}$				
コ	3	サ	-24	シ	15	ス	5
セ	108						

【解説】

[1]

標準偏差 s_x, s_y の値は

$$s_x = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{3} - (\bar{x})^2} = \sqrt{\frac{14}{3} - 2^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$s_y = \sqrt{\frac{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}{3} - (\bar{y})^2} = \sqrt{\frac{77}{3} - 5^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

である。共分散 s_{xy} の値は

$$\begin{aligned} s_{xy} &= \frac{1}{3} \left\{ (x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + (x_2 - \bar{x})(y_2 - \bar{y}) + (x_3 - \bar{x})(y_3 - \bar{y}) \right\} \\ &= \frac{1}{3} (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3) - \frac{1}{3} (x_1 + x_2 + x_3) \bar{y} - \frac{1}{3} (y_1 + y_2 + y_3) \bar{x} + \bar{x} \cdot \bar{y} \\ &= \frac{1}{3} (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3) - \frac{1}{3} \cdot 3 \bar{x} \cdot \bar{y} - \frac{1}{3} \cdot 3 \bar{y} \cdot \bar{x} + \bar{x} \cdot \bar{y} \\ &= \frac{1}{3} (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3) - \bar{x} \cdot \bar{y} \\ &= \frac{28}{3} - 2 \cdot 5 \\ &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

である。よって、相関係数 r_{xy} の値は

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}} = -1$$

である。

[2]

方程式①の判別式を D とする。①が実数解をもつとき、 θ のみたすべき条件は、

$$\frac{D}{4} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin\theta + 1)^2 + (\cos 2\theta - \sin\theta - 4) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2\theta + 3\sin\theta - 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin\theta - 1)(\sin\theta + 2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\theta \geq \frac{1}{2} \quad (\because \sin\theta + 2 > 0)$$

$$\therefore \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5}{6}\pi$$

である。ここで、解と係数の関係より、

$$\alpha + \beta = -2(2\sin\theta + 1), \alpha\beta = -(\cos 2\theta - \sin\theta - 4)$$

であるから、

$$\begin{aligned} (\alpha + 1)(\beta + 1) &= \alpha\beta + \alpha + \beta + 1 \\ &= -(\cos 2\theta - \sin\theta - 4) - 2(2\sin\theta + 1) + 1 \\ &= 2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 2 \\ &= 2\left(\sin\theta - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} \end{aligned}$$

と表せる。 θ が $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5}{6}\pi$ の範囲を動くとき、 $\sin\theta$ は $\frac{1}{2} \leq \sin\theta \leq 1$ を動くから、

$(\alpha + 1)(\beta + 1)$ は、 $\sin\theta = \frac{1}{2}$ のとき最小値 $\frac{7}{8}$ をとり、 $\sin\theta = \frac{3}{4}$ のとき最小値 $\frac{7}{8}$ をとる。

[3]

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ について、

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

である。 $f(x)$ が $x = -4, 2$ で極値をとるとき、 $f'(x)$ が $(x + 4)(x - 2)$ を因数にもつことが必要

である。このとき、2 次の係数に注意して、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(x + 4)(x - 2) \\ \Leftrightarrow 3x^2 + 2ax + b &= 3x^2 + 6x - 24 \end{aligned}$$

となるから、係数比較をして、

$$\begin{cases} 2a = 6 \\ b = -24 \end{cases}$$

$$\therefore (a, b) = (3, -24)$$

を得る。逆にこのとき

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 24 = 3(x + 4)(x - 2)$$

となり、増減表は以下のようになる。

x	...	-4	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	+	0
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

これより、 $f(x)$ は $x = -4, 2$ で極値をとることがわかる。 $f(1) = -20$ 、 $f'(1) = -15$ であるから

接線 l の方程式は、

$$y = -15(x - 1) - 20 = -15x - 5$$

となる。ここで、 $y = f(x)$ と接線 l のグラフの交点の x 座標は、 $y = f(x)$ と $y = -15x - 5$ の 2

式から y を消去して、

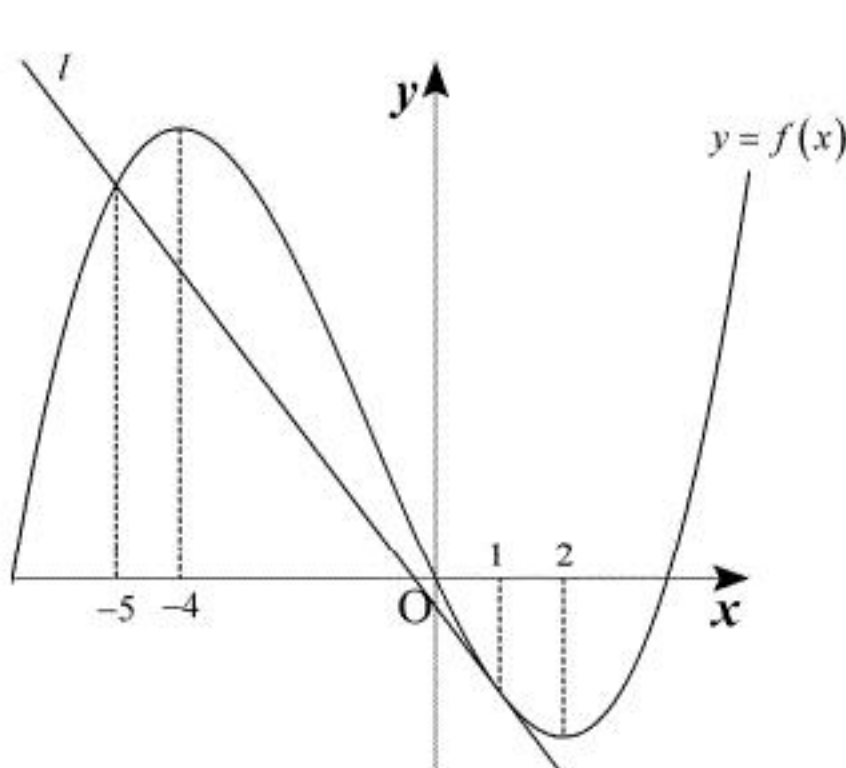
$$x^3 + 3x^2 - 24x = -15x - 5$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 (x + 5) = 0$$

$$\therefore x = 1, -5$$

となる。以上より、 $y = f(x)$ と接線 l のグラフは以下のようになる。



したがって、 $y = f(x)$ のグラフと接線 l で囲まれた面積は

$$\begin{aligned} &\int_{-5}^1 \{f(x) - (-15x - 5)\} dx \\ &= \int_{-5}^1 (x - 1)^2 (x + 5) dx \\ &= \int_{-5}^1 \left\{ (x - 1)^3 + 6(x - 1)^2 \right\} dx \\ &= \left[\frac{1}{4} (x - 1)^4 + \frac{1}{3} \cdot 6 (x - 1)^3 \right]_{-5}^1 \\ &= -\frac{1}{4} \cdot (-5 - 1)^4 - \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot (-5 - 1)^3 \\ &= \frac{1}{12} \cdot 6^4 \\ &= 108 \end{aligned}$$

である。

【解答】

ア	$\frac{1}{15}$	イ	$\frac{1}{5}$	ウ	14	エ	19
オ	$\frac{1}{d+1}$	カ	$\frac{d}{d+1}$	キ	$\frac{1}{d+2}$	ク	$\frac{d}{d+2}$

【解説】

[1]

当選くじを引く候補者の組み合わせは ${}_6\text{C}_2$ 通りであり、これらは同様に確からしい。A, Bが同時に当選するのはそのうちの ${}_2\text{C}_2$ 通りであるから、A, Bが同時に当選する確率は

$$\frac{{}_2\text{C}_2}{{}_6\text{C}_2}=\frac{1}{15}$$

である。当選くじを引く候補者にBが含まれる組み合わせは ${}_5\text{C}_1$ 通りである。したがって、Bが当選する確率は

$$\frac{{}_5\text{C}_1}{{}_6\text{C}_2}=\frac{1}{3}$$

である。よって、Bが当選したときにAも当選している確率は

$$\frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{5}$$

である。

[2]

A の得票数が13以下のとき、A の得票数を n ($n=1, 2, \dots, 13$) とおくと、以下のときにA は必ず当選しない。

n	6名の候補者の得票数
8, 9, 10, 11, 12, 13	$n+2, n+1, n, 15-n, 14-n, 13-n$
5, 6, 7	10, 9, 8, 7, 6, 5
0, 1, 2, 3, 4	$15-n, 9, 8, 7, 6, n$

$n=14$ であつA が当選しない場合があると仮定する。このとき、当選する候補者をB, C とし、Bの方が得票数が多いとしても一般性を失わない。このとき、Cは15票以上を得る必要があるため、Bは16票以上を得る必要がある。また、D, E, Fについて、全員が0票ということはないからD, E, Fの誰かに少なくとも1票は入る。このとき、

$$14+15+16+1=46>45$$

であり、票数が全体で45票であることに矛盾する。よって、常にAが当選するために必要なAの得票数の最小値は14である。次に、A, Bが2人とも当選する場合を考える。6人の得票数はA, B, C, D, E, Fの順で多いとする。A, Bの得票数の和が18以下とすると、Bの得票数は8以下である。また、Bの得票数はC, D, E, Fの得票数より多いから4票以上である必要がある。Bの得票数を m ($m=4, 5, \dots, 8$) とすると、A, C, D, E, Fの得票数はそれぞれ最大で $18-m, m-1, m-2, m-3, m-4$ となる。このとき、

$$(18-m)+m+(m-1)+(m-2)+(m-3)+(m-4)=4m+8\leq 4\cdot 8+8=40<45$$

であり、票数が全体で45票であることに矛盾する。よって、A, Bの得票数の和は19票以上である。また、A, Bの得票数の和が19票であるとき、A, B, C, D, E, Fの得票数を10, 9, 8, 7, 6, 5とすればA, Bが当選する。以上より、AとBの2名とも当選する場合、AとBの得票数の和の最小値は19である。

[3] (a)

Y党の得票率は $1-x$ であり、 $x\neq 1-x$ であるから $x\neq \frac{1}{2}$ である。A, Bの少なくとも1名が当選するとき、 x と $1-x$ の大小に注目して場合分けをする。

[1] $x>1-x\Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$ のとき

X党が最も得票率の高い政党となるから、A, Bの少なくとも1名が当選する。

[2] $x<1-x\Leftrightarrow x<\frac{1}{2}$ のとき

Y党が最も得票率の高い政党となるから、A, Bの少なくとも1名が当選する条件は

$$x\geq \frac{1-x}{d}\text{ かつ }x<\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{d+1}\leq x<\frac{1}{2}$$

である。

以上[1], [2]より、A, Bの少なくとも1名が当選するとき、 x の取り得る値の範囲は $\frac{1}{d+1}\leq x$ である。また、A, Bが2人とも当選するとき x のみたすべき条件は、

$$x>1-x\text{ かつ }\frac{x}{d}>1-x$$
$$\Leftrightarrow x>\frac{d}{d+1}(\because d>1)$$

である。

(b)

A, Bの少なくとも1名が当選するとき、 x と $\frac{1}{3}$ の大小に注目して場合分けをする。

[1] $x>\frac{1}{3}$ のとき

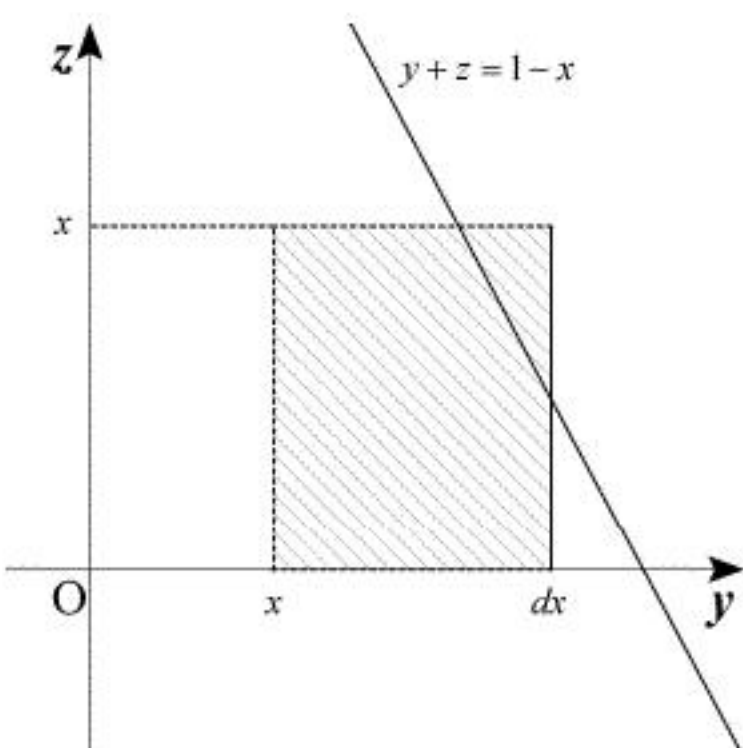
X党以外の2党の得票率の和は $\frac{2}{3}$ より小さいから残りの2党の得票率をどちらも $\frac{1}{3}$ より小さくすることができる。このとき、A, Bの少なくとも1名が当選する。

[2] $x\leq \frac{1}{3}$ のとき

X党以外の2党の得票率のうち大きい方を y 、小さい方を z とする。 $y<x, z<x$ とすると、 $x+y+z<3x\leq 1$ となるから、少なくとも $y>x$ である。このとき、A, Bの少なくとも1名が当選するための x の条件は

$$y>x>z\text{ かつ }x\geq \frac{y}{d}\text{ かつ }x+y+z=1\text{をみたす}(y, z)\text{の組が存在する}$$
$$\Leftrightarrow x<y\leq dx\text{ かつ }x>z\text{ かつ }x+y+z=1\text{をみたす}(y, z)\text{の組が存在する}$$
$$\Leftrightarrow yz\text{平面で、直線}y+z=1-x\text{が領域}x<y\leq dx\text{ かつ }x>z\text{と共通部分をもつ}$$

である。ここで直線 $y+z=1-x$ と領域 $x<y\leq dx$ かつ $x>z$ を図示すると、以下のようになる。ただし、境界は実線部は含み、点線部は含まない。



上図より、 x のみたすべき条件は

$$x\leq \frac{1}{3}\text{ かつ 点}(y, z)=(dx, x)\text{が直線}y+z=1-x\text{より上側にあること}$$
$$\Leftrightarrow x\leq \frac{1}{3}\text{ かつ }dx+x>1-x$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{d+2}<x\leq \frac{1}{3}$$

である。

以上[1], [2]よりA, Bの少なくとも1名が当選するとき x が取り得る値の範囲は $x>\frac{1}{d+2}$ である。また、A, Bの2名ともが当選する条件は、

$$x>y\text{ かつ }x>z\text{ かつ }\frac{x}{d}>y\text{ かつ }\frac{x}{d}>z$$
$$\Leftrightarrow y<\frac{x}{d}\text{ かつ }z<\frac{x}{d}\text{ かつ }y+z=1-x\text{をみたす}(y, z)\text{の組が存在する}$$

である。したがって、A, Bの2名ともが当選するとき x の取り得る値の範囲は

$$0<1-x<\frac{x}{d}+\frac{x}{d}$$
$$\therefore x>\frac{d}{d+2}$$

である。

Ⅲ

[1]

3個のボールの取り出し方は全部で ${}_9C_3$ 通りであり、これらは同様に確からしい。ここで、1回の試行で取り出した3個のボール全てが3の倍数となるのは ${}_3C_3$ 通りである。よって、3個のボール全てが3の倍数となる確率は

$$\frac{{}_3C_3}{{}_9C_3} = \frac{1}{84}$$

である。同様に、3個のボール全てが3で割って1余る数となる確率は

$$\frac{{}_3C_3}{{}_9C_3} = \frac{1}{84}$$

であり、3個のボール全てが3で割って2余る数となる確率は

$$\frac{{}_3C_3}{{}_9C_3} = \frac{1}{84}$$

である。

$$(\text{答}) \left\{ \begin{array}{l} \text{全てが3の倍数となる確率: } \frac{1}{84} \\ \text{全てが3で割って1余る数となる確率: } \frac{1}{84} \\ \text{全てが3で割って2余る数となる確率: } \frac{1}{84} \end{array} \right.$$

[2]

1回の試行で取り出した3個のボールの数字の和が3で割って1余るような数字の組み合わせは

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{3の倍数が2つと3で割って1余る数が1つ} \\ \text{3で割って1余る数が2つと3で割って2余る数が1つ} \\ \text{3で割って2余る数が2つと3の倍数が1つ} \end{array} \right.$$

のいずれかである。それぞれの場合は、 ${}_3C_2 \cdot {}_3C_1$ 通りあるから、求める確率は

$$\frac{{}_3C_2 \cdot {}_3C_2 \cdot 3}{{}_9C_3} = \frac{9}{28}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{9}{28}$$

[3]

1回の試行で取り出した3個のボールの数字の和が3の倍数となるような数字の組み合わせは

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{3の倍数が3つ} \\ \text{3で割って1余る数が3つ} \\ \text{3で割って2余る数が3つ} \\ \text{3の倍数が1つと3で割って1余る数が1つと3で割って2余る数が1つ} \end{array} \right.$$

のいずれかである。3の倍数が1つと3で割って1余る数が1つと3で割って2余る数が1つと

なるのは $({}_3C_1)^3$ 通りである。よって、3個のボールの数字の和が3の倍数となる確率は

$$\frac{{}_3C_3 \cdot 3 + ({}_3C_1)^3}{{}_9C_3} = \frac{5}{14}$$

であるから、 $P_1 = \frac{5}{14}$ である。また、1回の試行で取り出した3個のボールの数字の和が3で割って2余る確率は

$$1 - \frac{5}{14} - \frac{9}{28} = \frac{9}{28}$$

である。よって、1回目の試行で取り出した3個のボールの数字の和が3で割って1余るとき

と3で割って2余るとき、2回目の試行のあと6個の数字の和が3の倍数となる確率は $\frac{9}{28}$ である。また、1回目の試行で取り出した3個のボールの数字の和が3の倍数となるときは2回

目の試行のあと6個の数字の和が3の倍数となる確率は $\frac{5}{14}$ である。よって、

$$\begin{aligned} P_2 &= P_1 \cdot \frac{5}{14} + (1 - P_1) \cdot \frac{9}{28} \\ &= \frac{1}{28} P_1 + \frac{9}{28} \\ &= \frac{131}{392} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad P_1 = \frac{5}{14}, P_2 = \frac{131}{392}$$

[4]

[3]と同様に考えると、 n 回目の試行のあと $3n$ 個の数字の和が3の倍数となるとき、 $n+1$ 回

目の試行のあと $3(n+1)$ 個の数字の和が3の倍数となる確率は $\frac{5}{14}$ である。また、 n 回目の試行

のあと $3n$ 個のボールの数字の和が3で割りきれないときは $n+1$ 回目の試行のあと $3(n+1)$ 個

の数字の和が3の倍数となる確率は $\frac{9}{28}$ である。したがって、求める関係式は

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= \frac{5}{14} P_n + \frac{9}{28} (1 - P_n) \\ \Leftrightarrow P_{n+1} &= \frac{1}{28} P_n + \frac{9}{28} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad P_{n+1} = \frac{1}{28} P_n + \frac{9}{28}$$

[5]

[4]より、

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= \frac{1}{28} P_n + \frac{9}{28} \\ \Leftrightarrow P_{n+1} - \frac{1}{3} &= \frac{1}{28} \left(P_n - \frac{1}{3} \right) \end{aligned}$$

であるから、数列 $\left\{ P_n - \frac{1}{3} \right\}$ は初項が $P_1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{42}$ で、公比が $\frac{1}{28}$ の等比数列である。よって、

$$\begin{aligned} P_n - \frac{1}{3} &= \frac{1}{42} \cdot \left(\frac{1}{28} \right)^{n-1} \\ \Leftrightarrow P_n &= \frac{1}{3} + \frac{1}{42} \cdot \left(\frac{1}{28} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

が成り立つ。

$$(\text{答}) \quad P_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{42} \cdot \left(\frac{1}{28} \right)^{n-1}$$