

【解答】

ア	$\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$			イ	$\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi\right)$			ウ	$\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{3}{8}\pi+i\sin\frac{3}{8}\pi\right)$		
エ	$\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{11}{8}\pi+i\sin\frac{11}{8}\pi\right)$			オ	$\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{5}{8}\pi+i\sin\frac{5}{8}\pi\right)$			カ	$\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{13}{8}\pi+i\sin\frac{13}{8}\pi\right)$		
キ	w^4+2w^2+2	ク	0	ケ	2	コ	-2	サ	$\frac{1+\sqrt{2}}{4}$	シ	1

【解説】

[1]

$z^2+2z+2=0$ を解くと、

$$z=-1\pm i$$

であるから、 $z_1=-1+i, z_2=-1-i$ である。ここで、

$$-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$$

$$-1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi\right)$$

であるから、 $z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right), z_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi\right)$ である。

[2]

w が $w^2=z_1$ をみたすとき、 n を整数として、

$$w^2=z_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |w^2|=|z_1| \\ \arg w^2=\arg z_1+2n\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |w|^2=\sqrt{2} \\ 2\arg w=\frac{3}{4}\pi+2n\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |w|=\sqrt[4]{2} \ (\because |w|>0) \\ \arg w=\frac{3}{8}\pi+n\pi \end{cases}$$

となる。ここで、 $0\leq\arg w<2\pi$ であるから、 $n=0,1$ である。よって、

$$w=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{3}{8}\pi+i\sin\frac{3}{8}\pi\right), \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{11}{8}\pi+i\sin\frac{11}{8}\pi\right)$$

である。また、 w が $w^2=z_2$ をみたすとき、 m を整数として、

$$w^2=z_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |w^2|=|z_2| \\ \arg w^2=\arg z_2+2m\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |w|^2=\sqrt{2} \\ 2\arg w=\frac{5}{4}\pi+2m\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |w|=\sqrt[4]{2} \ (\because |w|>0) \\ \arg w=\frac{5}{8}\pi+m\pi \end{cases}$$

となる。ここで、 $0\leq\arg w<2\pi$ であるから、 $m=0,1$ である。よって、

$$w=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{5}{8}\pi+i\sin\frac{5}{8}\pi\right), \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{13}{8}\pi+i\sin\frac{13}{8}\pi\right)$$

である。ここで、 z_1, z_2 は 2 次方程式 $z^2+2z+2=0$ の解であるから、 w_k ($k=1, 2, 3, 4$) はそれぞれ

$$(w_k^2)^2+2w_k^2+2=0$$

$$\Leftrightarrow w_k^4+2w_k^2+2=0$$

をみたす。よって、 w_1, w_2, w_3, w_4 は 4 次方程式

$$w^4+2w^2+2=0$$

の解である。よって、

$$w^4+2w^2+2=(w-w_1)(w-w_2)(w-w_3)(w-w_4)$$

が成り立つ。右辺の w^3 の係数は $-(w_1+w_2+w_3+w_4)$ であり、定数項は $w_1w_2w_3w_4$ であるから、

係数比較をすると、

$$w_1+w_2+w_3+w_4=0, w_1w_2w_3w_4=2$$

である。また、 w_1 は $w_1^2=z_1$ をみたし、 w_2 は $w_2^2=z_2$ をみたすから、

$$w_1^2+w_2^2=z_1+z_2=(-1+i)+(-1-i)=-2$$

である。

[3]

$$\arg\frac{z_1-0}{w_1-0}=\arg w_1=\frac{3}{8}\pi$$

であるから、

$$\begin{aligned} S_1^2 &= \left(\frac{1}{2}|z_1||w_1|\sin\frac{3}{8}\pi\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\cdot 2\cdot\sqrt{2}\cdot\sin^2\frac{3}{8}\pi \\ &= \frac{1}{4}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{1-\cos\frac{3}{4}\pi}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\} \\ &= \frac{\sqrt{2}+1}{4} \end{aligned}$$

である。また、

$$\arg\frac{z_2-0}{w_2-0}=\arg w_2=\frac{5}{8}\pi$$

であるから、

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{2}|z_2||w_2|\sin\frac{5}{8}\pi \\ &= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sin\frac{3}{8}\pi \\ &= \frac{1}{2}|z_1||w_1|\sin\frac{3}{8}\pi \\ &= S_1 \end{aligned}$$

である。よって、 $\frac{S_1}{S_n}=1$ である。

〔解答〕

ア	101011	イ	10110	ウ	22	エ	44	オ	24	カ	0
キ	7	ク	32	ケ	5	コ	4	サ	5	シ	40

〔解説〕

[1]

$43=2^5+2^3+2^1+2^0$ であるから、 $a_1=43$ を2進法で表すと、
 $a_1=101011_{(2)}$
である。ここで、 a_1 は0以上63以下の整数であるから、 p, q, r, s, t, u を0, 1のいずれかとして、2進法で

$a_1=p\cdot 2^5+q\cdot 2^4+r\cdot 2^3+s\cdot 2^2+t\cdot 2^1+u\cdot 2^0=pqrstu_{(2)}$
と書ける。ただし、2進法で最高位が0としても000101₍₂₎のように書くものとする。このとき、

$$2a_1=p\cdot 2^6+q\cdot 2^5+r\cdot 2^4+s\cdot 2^3+t\cdot 2^2+u\cdot 2^1=pqrstu0_{(2)}$$

であるから、

$$a_2=q\cdot 2^5+r\cdot 2^4+s\cdot 2^3+t\cdot 2^2+u\cdot 2^1=qrstu0_{(2)}$$

である。同様に考えると、

$$a_3=rstu00_{(2)}, a_4=stu000_{(2)}, a_5=tu0000_{(2)}, a_6=u00000_{(2)}, a_7=000000_{(2)}=0$$

となる。よって、 $n\geq 7$ のとき、 $a_7=0$ より、 a_1 の値によらず $a_n=0$ である。また、

$$n\geq 6\text{のとき} a_n=0$$

$$\Leftrightarrow u=0$$

である。このような a_1 は (p, q, r, s, t) の組み合わせの数だけあるから、 $2^5=32$ (個)ある。よって、クは32である。 $a_1=43=101011_{(2)}$ のとき、

$$a_2=010110_{(2)}=2^4+2^2+2^1=22$$

であるから、 a_2 を2進法で表すと10110₍₂₎で、10進法で表すと22である。また、

$$a_3=101100_{(2)}=2^5+2^3+2^2=44$$

$$a_4=011000_{(2)}=2^4+2^3=24$$

である。 $n\geq 7$ のとき、 a_1 の値によらず $a_n=0$ であるから、 $a_8=0$ である。

[2]

b_1 は0以上127以下の整数であるから、 p, q, r, s, t, u, v を0, 1のいずれかとして、2進法で

$$b_1=p\cdot 2^6+q\cdot 2^5+r\cdot 2^4+s\cdot 2^3+t\cdot 2^2+u\cdot 2^1+v\cdot 2^0=pqrstuv_{(2)}$$

と書ける。ただし、2進法で最高位が0としても0000101₍₂₎のように書くものとする。このとき、

$$4b_1=p\cdot 2^8+q\cdot 2^7+r\cdot 2^6+s\cdot 2^5+t\cdot 2^4+u\cdot 2^3+v\cdot 2^2=pqrstuv00_{(2)}$$

であるから、

$$b_2=r\cdot 2^6+s\cdot 2^5+t\cdot 2^4+u\cdot 2^3+v\cdot 2^2=rstuv00_{(2)}$$

である。同様に考えると、

$$b_3=tnv0000_{(2)}, b_4=v000000_{(2)}, b_5=0000000_{(2)}=0$$

となる。 $n\geq 5$ のとき、 $b_5=0$ より、 b_1 の値によらず $b_n=0$ である。また、

$$n\geq 2\text{のとき} b_n=0$$

$$\Leftrightarrow r=s=t=u=v=0$$

である。このような b_1 は (p, q) の組み合わせの数だけあるから、 $2^2=4$ 個ある。

[3]

c_1 は0以上80以下の整数であるから、 p, q, r, s を0, 1, 2のいずれかとして、3進法で

$$c_1=p\cdot 3^3+q\cdot 3^2+r\cdot 3^1+s\cdot 3^0=pqrs_{(3)}$$

と書ける。ただし、3進法で最高位が0としても0101₍₃₎のように書くものとする。このとき、

$$3c_1+1=p\cdot 3^4+q\cdot 3^3+r\cdot 3^2+s\cdot 3^1+1=pqrs1_{(3)}$$

であるから、

$$c_2=q\cdot 3^3+r\cdot 3^2+s\cdot 3^1+1=grs1_{(3)}$$

である。同様に考えると、

$$c_3=rs11_{(3)}, c_4=s111_{(3)}, c_5=1111_{(3)}$$

となる。 $n\geq 5$ のとき、 $c_5=1111_{(3)}$ より、 c_1 の値によらず

$$c_n=1111_{(3)}=3^3+3^2+3^1+3^0=40$$

である。

III

【解答】

ア	2	イ	$\frac{\sin t}{1-\cos t}$	ウ	$\pi \log 2$	エ	$(\pi-a) \log 2$
オ	0	カ	$\left(2b-\frac{\pi}{2}\right) \log 2$	キ	$\frac{1}{2} J-\frac{\pi}{4} \log 2$	ク	$2 \pi \log 2$

【解説】

[1]

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow +0} f(t) &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{t \sin t}{1-\cos t} \\ &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{t \sin t}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} \\ &= \lim_{t \rightarrow +0} 2 \cdot \frac{\sin t}{t} \cdot \left(\frac{\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 \\ &= 2\end{aligned}$$

であるから、 $f(0)=\lim_{t \rightarrow +0} f(t)=2$ である。

[2]

$\log(1-\cos t)$ の導関数は、

$$\frac{d}{dt}\{\log(1-\cos t)\}=\frac{\frac{d}{dt}(1-\cos t)}{1-\cos t}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$$

である。ここで、

$$I(a)=\int_a^{\pi} \frac{t \sin t}{1-\cos t} dt$$

に対して部分積分法を用いると、

$$\begin{aligned}I(a) &= \int_a^{\pi} t \cdot \frac{\sin t}{1-\cos t} dt \\ &= \left[t \log(1-\cos t) \right]_a^{\pi} - \int_a^{\pi} \log(1-\cos t) dt \\ &= \pi \log 2 - a \log(1-\cos a) - \int_a^{\pi} \log(1-\cos t) dt\end{aligned}$$

となる。ここで、三角関数の半角の公式を用いると、

$$\begin{aligned}\int_a^{\pi} \log(1-\cos t) dt &= \int_a^{\pi} \log\left(2 \sin^2 \frac{t}{2}\right) dt \\ &= \int_a^{\pi} \left\{ \log 2 + 2 \log\left(\sin \frac{t}{2}\right) \right\} dt\end{aligned}$$

となる。ここで、 $t=2x$ において置換積分法を用いると、 $dt=2dx$ であり、積分区間の対応表は以下になる。

t	a	$\rightarrow$	π
x	$\frac{a}{2}$	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{2}$

以上より、

$$\begin{aligned}\int_a^{\pi} \log(1-\cos t) dt &= \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{\log 2 + 2 \log(\sin x)\} \cdot 2 dx \\ &= \left[2(\log 2)x \right]_{\frac{a}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 4 \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x) dx \\ &= (\pi-a) \log 2 + 4 \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x) dx\end{aligned}$$

となる。

[3]

$$\begin{aligned}K(b)-L(b) &= \int_b^{\frac{\pi}{2}-b} \{\log(\sin x) - \log(\cos x)\} dx \\ &= \int_b^{\frac{\pi}{2}-b} \log(\tan x) dx\end{aligned}$$

である。ここで、 $y=\frac{\pi}{2}-x$ において置換積分法を用いると、 $dy=-dx$ であり、積分区間の対応表は以下になる。

x	b	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{2}-b$
y	$\frac{\pi}{2}-b$	$\rightarrow$	b

以上より、

$$\begin{aligned}K(b)-L(b) &= \int_b^{\frac{\pi}{2}-b} \log(\tan x) dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}-b}^b \log\left(\frac{1}{\tan y}\right) \cdot (-dy) \\ &= -\int_b^{\frac{\pi}{2}-b} \log(\tan y) dy \\ &= -\{K(b)-L(b)\}\end{aligned}$$

となる。よって、 $K(b)-L(b)=0$ である。また、

$$\begin{aligned}K(b)+L(b) &= \int_b^{\frac{\pi}{2}-b} \{\log(\sin x) + \log(\cos x)\} dx \\ &= \int_b^{\frac{\pi}{2}-b} \log\left(\frac{1}{2} \sin 2x\right) dx\end{aligned}$$

である。ここで、 $2x=t$ において置換積分法を用いると、 $dx=\frac{1}{2}dt$ であり、積分区間の対応表は以下になる。

x	b	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{2}-b$
t	$2b$	$\rightarrow$	$\pi-2b$

以上より、

$$\begin{aligned}K(b)+L(b) &= \int_{2b}^{\pi-2b} \log\left(\frac{1}{2} \sin t\right) \cdot \frac{1}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{2b}^{\pi-2b} \log\left(\frac{1}{2} \sin t\right) dt\end{aligned}$$

である。ここで、

$$\log\left\{\frac{1}{2} \sin(\pi-t)\right\} = \log\left(\frac{1}{2} \sin t\right)$$

であるから、 $\log\left(\frac{1}{2} \sin t\right)$ は $t=\frac{\pi}{2}$ で対称である。よって、

$$\begin{aligned}K(b)+L(b) &= \int_{2b}^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{1}{2} \sin t\right) dt \\ &= \int_{2b}^{\frac{\pi}{2}} \{\log(\sin t) - \log 2\} dt \\ &= \int_{2b}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin t) dt - \left[(\log 2)t \right]_{2b}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \int_{2b}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin t) dt + \left(2b - \frac{\pi}{2} \right) \log 2\end{aligned}$$

である。ここで、

$$L(b)-K(b)=0 \Leftrightarrow L(b)=K(b)$$

であるから、

$$\begin{aligned}2K(b) &= \int_{2b}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin t) dt + \left(2b - \frac{\pi}{2} \right) \log 2 \\ \Leftrightarrow K(b) &= \frac{1}{2} \int_{2b}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin t) dt + \left(b - \frac{\pi}{4} \right) \log 2\end{aligned}$$

であるから、

$$\lim_{b \rightarrow +0} K(b) = \frac{1}{2} J - \frac{\pi}{4} \log 2$$

である。

[4]

$J=\lim_{b \rightarrow +0} K(b)$ であるから、 [3] より、

$$\begin{aligned}J &= \frac{1}{2} J - \frac{\pi}{4} \log 2 \\ \Leftrightarrow J &= -\frac{\pi}{2} \log 2\end{aligned}$$

である。よって、関係式(1), (2)より、

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} f(t) dt &= \lim_{a \rightarrow +0} I(a) \\ &= \lim_{a \rightarrow +0} \left\{ \pi \log 2 - a \log(1-\cos a) - \int_a^{\pi} \log(1-\cos t) dt \right\} \\ &= \lim_{a \rightarrow +0} \left[\pi \log 2 - a \log(1-\cos a) - \left\{ (\pi-a) \log 2 + 4 \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x) dx \right\} \right] \\ &= \lim_{a \rightarrow +0} \left\{ a \log 2 - a \log(1-\cos a) - 4 \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x) dx \right\} \\ &= -4J \\ &= 2\pi \log 2\end{aligned}$$

である。

Ⅳ

【解答】

ア	6	イ	$\frac{1}{9}$	ウ	$\frac{1}{6}$	エ	$\frac{29}{72}$	オ	$\frac{1}{9}$
カ	$\frac{13}{54}$	キ	$\frac{4}{5}$						

【解説】

[1]

すべての試合数は4チームから2チームを選ぶときの選び方の数であるから、
 ${}_4C_2=6$ (通り)

である。①, ②, ③より、Aが全勝する確率は、

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{9}$$

である。AがCに負け、B、Dに勝つ確率は

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{9}$$

である。このとき、CがB、Dの両方に勝つ確率は

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

であるから、Cが全勝しない確率は $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ である。よって、AがCのみに負けるが、Cが全

勝しない確率は

$$\frac{2}{9} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{6}$$

である。ここで、優勝するチームが1勝しかしないとすると、全チームが1勝以下となるが、これは全試合が6試合で、必ず勝敗が決まることに矛盾する。よって、Aが優勝するならば、

Aは少なくとも2勝する必要がある。よって、Aが優勝するとき、

- [1] Aが全勝するとき
- [2] AがBのみに負けるが、Bが全勝しないとき
- [3] AがCのみに負けるが、Cが全勝しないとき
- [4] AがDのみに負けるが、Dが全勝しないとき

のいずれかである。以下、これらに従い場合分けを行う。

[1] Aが全勝するとき

確率は $\frac{1}{9}$ である。

[2] AがBのみに負けるが、Bが全勝しないとき
AがBに負け、C、Dに勝つ確率は

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{18}$$

である。このとき、BがC、Dの両方に勝つ確率は

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

であるから、Bが全勝しない確率は $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ である。よって、AがBのみに負けるが、B

が全勝しない確率は

$$\frac{1}{18} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{24}$$

である。

[3] AがCのみに負けるが、Cが全勝しないとき

確率は $\frac{1}{6}$ である。

[4] AがDのみに負けるが、Dが全勝しないとき
AがDに負け、B、Cに勝つ確率は

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{9}$$

である。このとき、DがB、Cの両方に勝つ確率は

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

であるから、Dが全勝しない確率は $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ である。よって、AがDのみに負けるが、

Dが全勝しない確率は

$$\frac{1}{9} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{12}$$

である。

以上、[1]～[4]より、Aが優勝する確率は、

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{24} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{29}{72}$$

である。

[2]

Aが1回戦で対戦するチームの選び方は3通りであるから、Aが1回戦でBと対戦する確率

は $\frac{1}{3}$ である。このとき、AがBに勝ち、CがDに勝つ確率は

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

である。よって、Aが1回戦でBと対戦し、かつ2回戦でCと対戦する確率は、

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

である。また、Aが優勝するとき、Aの勝ち上がり方は、

- [1] Aが1回戦でBと対戦し、かつ2回戦でCと対戦する場合
- [2] Aが1回戦でBと対戦し、かつ2回戦でDと対戦する場合
- [3] Aが1回戦でCと対戦し、かつ2回戦でBと対戦する場合
- [4] Aが1回戦でCと対戦し、かつ2回戦でDと対戦する場合
- [5] Aが1回戦でDと対戦し、かつ2回戦でBと対戦する場合
- [6] Aが1回戦でDと対戦し、かつ2回戦でCと対戦する場合

のいずれかである。[1]と[3]、[2]と[5]、[4]と[6]は同じ確率であるから、以下[1]、[2]、[4]の確率を

考える。

[1] Aが1回戦でBと対戦し、かつ2回戦でCと対戦する場合

AがCに勝つ確率は $\frac{1}{3}$ であるから、Aが優勝する確率は、

$$\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$$

である。

[2] Aが1回戦でBと対戦し、かつ2回戦でDと対戦する場合

Aが1回戦で対戦するチームの選び方は3通りであるから、Aが1回戦でBと対戦する

確率は $\frac{1}{3}$ である。このとき、AがBに勝ち、DがCに勝つ確率は

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

である。AがDに勝つ確率は $\frac{1}{2}$ であるから、Aが優勝する確率は、

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{18}$$

である。

[4] Aが1回戦でCと対戦し、かつ2回戦でDと対戦する場合

Aが1回戦で対戦するチームの選び方は3通りであるから、Aが1回戦でCと対戦する

確率は $\frac{1}{3}$ である。このとき、AがCに勝ち、DがBに勝つ確率は

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

である。AがDに勝つ確率は $\frac{1}{2}$ であるから、Aが優勝する確率は、

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{36}$$

である。

以上より、Aが優勝する確率は

$$2 \cdot \left(\frac{1}{27} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36} \right) = \frac{13}{54}$$

である。

[3]

[1] と同様に考えると、春の大会でA'が優勝する確率は、

$$\frac{1}{2}pq + \frac{1}{2}(1-p)q \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2}p(1-q) \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2}pq \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{8}pq + \frac{3}{8}(p+q)$$

である。また、[2] と同様に考えると、秋の大会でA'が優勝する確率は、

$$2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot p \cdot \frac{1}{2} \cdot q + \frac{1}{3} \cdot p \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot q \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{3}pq + \frac{1}{6}(p+q)$$

である。よって、 p, q のみたすべき条件は、

$$\begin{cases} \frac{1}{8}pq + \frac{3}{8}(p+q) = \frac{49}{100} \\ \frac{1}{3}pq + \frac{1}{6}(p+q) = \frac{23}{75} \end{cases} \quad \therefore (pq, p+q) = \left(\frac{8}{25}, \frac{6}{5} \right)$$

となる。解と係数の関係より、 p, q は、2次方程式 $t^2 - \frac{6}{5}t + \frac{8}{25} = 0$ の2解であるから、これを

解くと、

$$\begin{aligned} t^2 - \frac{6}{5}t + \frac{8}{25} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(t - \frac{2}{5} \right) \left(t - \frac{4}{5} \right) &= 0 \\ \therefore t &= \frac{2}{5}, \frac{4}{5} \end{aligned}$$

となる。 $q < \frac{1}{2}$ より、 $(p, q) = \left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5} \right)$ である。