

【解答】

〔1〕	ア	イ	
	$0, a$	$\sqrt{n(n-1)}$	
〔2〕	ウ	エ	オ
	$\frac{1}{2}a^4 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4}$	$\frac{a}{\sqrt{3}}$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}a^3$
〔3〕	カ	キ	ク
	$\frac{4}{n^2-1}a^{n+1} - \frac{1}{n-1}a^2 + \frac{1}{n+1}$	$\frac{1}{n-1}a^2 - \frac{1}{n+1}$	$\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$

【解説】

〔1〕

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ \Leftrightarrow x^n &= a^2 x^{n-2} \\ \Leftrightarrow (x-a)(x+a)x^{n-2} &= 0 \\ \therefore x &= 0, a \quad (\because x \geq 0, a > 0) \end{aligned}$$

であるから、 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ は n の値によらず $x=0, a$ で共有点を持つ。また、

$$\begin{aligned} f'(x) &= nx^{n-1} \\ f''(x) &= n(n-1)x^{n-2} \end{aligned}$$

であるから、関数 $f''(x)$ が関数 $g(x)=a^2x^{n-2}$ に等しくなるのは、

$$\begin{aligned} a^2 &= n(n-1) \\ \therefore a &= \sqrt{n(n-1)} \quad (\because a > 0, n(n-1) > 0) \end{aligned}$$

のときである。

〔2〕

$n=3$ のとき $f(x)=x^3, g(x)=a^2x$ である。 $0 < a < 1$ より、 $f(x)-g(x)=x(x-a)(x+a)$ は

$$\begin{aligned} 0 \leq x < a \text{ のとき } f(x)-g(x) &\leq 0 \\ a \leq x \leq 1 \text{ のとき } f(x)-g(x) &\geq 0 \end{aligned}$$

を満たすから、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 |f(x)-g(x)| dx \\ &= \int_0^a \{-f(x)+g(x)\} dx + \int_a^1 \{f(x)-g(x)\} dx \\ &= \int_0^a (-x^3+a^2x) dx + \int_a^1 (x^3-a^2x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{a^2}{2}x^2 \right]_0^a + \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{a^2}{2}x^2 \right]_a^1 \\ &= \frac{1}{2}a^4 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となる。また、

$$g(x)-f(x)=-x^3+a^2x$$

を x について微分すると

$$\begin{aligned} \{g(x)-f(x)\}' &= -3x^2+a^2 \\ &= -3\left(x-\frac{a}{\sqrt{3}}\right)\left(x+\frac{a}{\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

となるから、 $g(x)-f(x)$ の $0 \leq x \leq 1$ での増減は次の表の通りになる。

x	0	...	$\frac{a}{\sqrt{3}}$	...	1
$\{g(x)-f(x)\}'$		+	0	-	
$g(x)-f(x)$		↗	極大値	↘	

前表より、この範囲において $g(x)-f(x)$ は $x=\frac{a}{\sqrt{3}}$ のときに最大値を取り、その値は

$$\begin{aligned} g\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)-f\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right) &= a^2 \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} - \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^3 \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{9}a^3 \end{aligned}$$

である。

〔3〕

〔1〕 $0 < a < 1$ のとき

$$\begin{aligned} f(x)-g(x) &= (x-a)(x+a)x^{n-2} \text{ は、} \\ 0 \leq x < a \text{ のとき } f(x)-g(x) &\leq 0 \\ a \leq x \leq 1 \text{ のとき } f(x)-g(x) &\geq 0 \end{aligned}$$

を満たす。よって、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 |f(x)-g(x)| dx \\ &= \int_0^a \{-f(x)+g(x)\} dx + \int_a^1 \{f(x)-g(x)\} dx \\ &= \int_0^a (-x^n+a^2x^{n-2}) dx + \int_a^1 (x^n-a^2x^{n-2}) dx \\ &= \left[-\frac{1}{n+1}x^{n+1} + \frac{a^2}{n-1}x^{n-1} \right]_0^a + \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1} - \frac{a^2}{n-1}x^{n-1} \right]_a^1 \\ &= \frac{4}{n^2-1}a^{n+1} - \frac{1}{n-1}a^2 + \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

となる。また、 S を a について微分すると

$$\begin{aligned} S' &= \frac{4}{n^2-1}(n+1)a^n - \frac{2}{n-1}a \\ &= \frac{4a}{n-1}\left(a^{n-1} - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

となるから、この範囲における S の増減は次の表の通りになる。

a	0	...	$\frac{1}{\sqrt[n-1]{2}}$	...	1
S'		-	0	+	
S		↘	極小値	↗	

前表より、この範囲で S の値が最小となるのは $a=\frac{1}{\sqrt[n-1]{2}}$ のときである。

〔2〕 $a \geq 1$ のとき

$f(x)-g(x)=(x-a)(x+a)x^{n-2}$ は $0 \leq x \leq 1$ では常に $f(x)-g(x) \leq 0$ を満たす。よって

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 |f(x)-g(x)| dx \\ &= \int_0^1 \{-f(x)+g(x)\} dx \\ &= \int_0^1 (-x^n+a^2x^{n-2}) dx \\ &= \left[-\frac{1}{n+1}x^{n+1} + \frac{a^2}{n-1}x^{n-1} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{n-1}a^2 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

となる。また、 S を a について微分すると

$$S' = \frac{2}{n-1}a \quad (>0)$$

となるから、この範囲で S は単調増加である。

〔1〕, 〔2〕より、 S は $0 < a < \frac{1}{\sqrt[n-1]{2}}$ の範囲で単調に減少し、 $a=\frac{1}{\sqrt[n-1]{2}}$ で最小値を取り、 $a > \frac{1}{\sqrt[n-1]{2}}$ の範

囲では単調に増加することが分かる。よって各 n に対して S を最小にする a は $a=\frac{1}{\sqrt[n-1]{2}}$ であ

る。

II

【解答】

〔1〕	ア	イ	ウ		
	0	$\frac{p-1}{p}$	$2-p$		
〔2〕	エ	オ	カ	キ	ク
	$-\frac{p+1}{p}$	$\frac{p+1}{p^2}$	$-p^2+2p+4$	$1+\sqrt{6}$	$-p^2+2p+4$

【解説】

〔1〕

方程式を変形すると、

$$\begin{aligned}x &= px(1-x) \\ \Leftrightarrow x\{1-p(1-x)\} &= 0 \\ \Leftrightarrow x(px-p+1) &= 0\end{aligned}$$

が得られるから、方程式の解は $x=0, \frac{p-1}{p}$ である。ただし、 $3 < p \leq 4$ より、 $0 < \frac{p-1}{p}$ である。

また、 $f(x)$ の導関数は、

$$\begin{aligned}f'(x) &= \{px(1-x)\}' \\ &= p(1-x) - px \\ &= -2px + p\end{aligned}$$

で与えられるため、

$$f'\left(\frac{p-1}{p}\right) = -2p \cdot \frac{p-1}{p} + p = 2-p$$

である。

〔2〕

方程式 $x=g(x)$ は、

$$\begin{aligned}x &= g(x) \\ \Leftrightarrow x &= pf(x)(1-f(x)) \\ \Leftrightarrow x &= p^2x(1-x)\{1-px(1-x)\} \\ \Leftrightarrow x\{1-p^2(1-x)(1-px+px^2)\} &= 0 \\ \Leftrightarrow x\{p^3x^3-2p^3x^2+p^2(p+1)x+(1-p^2)\} &= 0 \\ \Leftrightarrow x\{px-(p-1)\}\{p^2x^2-p(p+1)x+(p+1)\} &= 0\end{aligned}$$

と変形できる。ここで、 α, β を $x=g(x)$ の解のうち、 $x=f(x)$ を満たさないものとする、

〔1〕より、 $\alpha, \beta \neq 0, \frac{p-1}{p}$ であるから、 α, β は方程式 $p^2x^2-p(p+1)x+(p+1)=0$ の解である。

この方程式の両辺を p^2 で割ると、

$$x^2 - \frac{p+1}{p}x + \frac{p+1}{p^2} = 0$$

が得られる。 α, β がこの2次方程式の解であることから、解と係数の関係より、

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{p+1}{p} \\ \alpha\beta = \frac{p+1}{p^2} \end{cases}$$

が成立する。したがって、

$$\begin{aligned}f'(\alpha)f'(\beta) &= (-2p\alpha+p)(-2p\beta+p) \\ &= 4p^2\alpha\beta - 2p^2(\alpha+\beta) + p^2 \\ &= -p^2+2p+4\end{aligned}$$

である。さらに、

$$\begin{aligned}|f'(\alpha)f'(\beta)| &< 1 \\ \Leftrightarrow -1 &< -p^2+2p+4 < 1 \\ \Leftrightarrow -1 &< -(p-1)^2+5 < 1 \\ \Leftrightarrow 4 &< (p-1)^2 < 6\end{aligned}$$

より、 $3 < p \leq 4$ の範囲で、 $|f'(\alpha)f'(\beta)| < 1$ を解くと、 $3 < p < 1+\sqrt{6}$ である。また、 $g(x)$ の導

関数は、合成関数の微分法より、

$$\begin{aligned}g'(x) &= \{f(f(x))\}' \\ &= f'(f(x)) \cdot f'(x)\end{aligned}$$

であるから、 $f(\alpha)=\beta, f(\beta)=\alpha$ が成立することを利用すると、

$$\begin{cases} g'(\alpha) = f'(f(\alpha)) \cdot f'(\alpha) = f'(\beta)f'(\alpha) \\ g'(\beta) = f'(f(\beta)) \cdot f'(\beta) = f'(\alpha)f'(\beta) \end{cases}$$

より、

$$g'(\alpha) = g'(\beta) = f'(\alpha)f'(\beta) = -p^2+2p+4$$

が得られる。

III

【解答】

〔1〕	ア	イ	ウ			
	$(-1, 0, 2)$	$\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$			
〔2〕	エ	オ	カ			
	12	$2x-y+4$	$(-2, 2, -2)$			
〔3〕	キ	ク	ケ	コ	サ	シ
	$2\sqrt{6}$	A	B	$\frac{-\sqrt{6}r+12}{24}$	$\frac{\sqrt{6}r+12}{24}$	$\frac{\sqrt{r^2-24}}{2}$

【解説】

〔1〕

点 P は線分 AB の中点であるからその座標は

$$\left(\frac{1-3}{2}, \frac{-1+1}{2}, \frac{1+3}{2}\right)$$

$$\therefore (-1, 0, 2)$$

となる。また、点 P は直線 AB 上の点だから実数 t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} \\ &= (1, -1, 1) + t(-4, 2, 2) \\ &= (-4t+1, 2t-1, 2t+1)\end{aligned}$$

と表せる。ここで、点 P が yz 平面上にあるとき x 座標は 0 となるから

$$\begin{aligned}-4t+1 &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

となる。よって

$$\overrightarrow{OP} = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

となり、求める座標は

$$\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

となる。また、直線 OP が直線 AB と直交する時、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB} &= 0 \\ \Leftrightarrow (-4t+1, 2t-1, 2t+1) \cdot (-4, 2, 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow 24t-4 &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

となるから、

$$\overrightarrow{OP} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

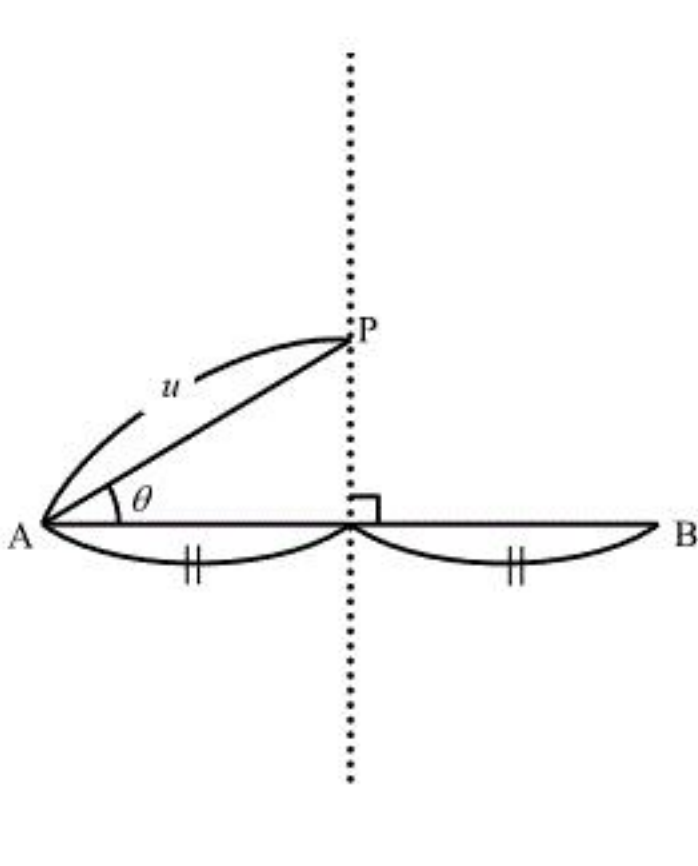
であり、求める座標は

$$\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

となる。

〔2〕

点 P は $AP=BP$ を満たす点であるから線分 AB の垂直二等分線上にある。



したがって、3 点 A, B, P の位置関係は上図のようになる。 $AP=u$, $\angle PAB=\theta$ とおくと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} &= |\overrightarrow{AP}| |\overrightarrow{AB}| \cos \theta \\ &= u \cdot AB \cdot \cos \theta\end{aligned}$$

となり、上図より

$$u \cos \theta = \frac{1}{2} AB$$

である。また、

$$\begin{aligned}AB &= \sqrt{(-3-1)^2 + \{1-(-1)\}^2 + (3-1)^2} \\ &= 2\sqrt{6}\end{aligned}$$

であることより、求める内積の値は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} &= AB \cdot \frac{1}{2} AB \\ &= \frac{1}{2} (2\sqrt{6})^2 \\ &= 12\end{aligned}$$

となる。また、 $P(x, y, z)$ とすると、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} &= (x-1, y+1, z-1) \cdot (-4, 2, 2) \\ &= -4x+2y+2z+4\end{aligned}$$

であり、これが 12 となるから

$$\begin{aligned}-4x+2y+2z+4 &= 12 \\ \Leftrightarrow z &= 2x-y+4\end{aligned}$$

となる。3 点 O, A, P が同一直線上、すなわち点 P が直線 OA 上にあるとき、実数 s を用いて

$$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA}$$

と表せるから

$$(x, y, z) = (s, -s, s)$$

となる。 $z=2x-y+4$ にこれを代入すると

$$\begin{aligned}2s-(-s)+4 &= s \\ \therefore s &= -2\end{aligned}$$

とわかる。したがって点 P の座標は

$$(-2, 2, -2)$$

となる。

〔3〕

点 P が直線 AB 上に存在しないとき、 $\triangle APB$ に対して三角不等式を用いて

$$r = AP+BP > AB$$

であり、点 P が直線 AB 上に存在しかつ線分 AB 上に存在しないとき、 $AP > AB$ または

$BP > AB$ が成り立つから、

$$r = AP+BP > AB$$

となる。一方、点 P が線分 AB 上に存在するとき、

$$r = AP+BP = AB$$

が成り立つ。したがって、 $r \geq 2\sqrt{6}$ が成り立ち、直線 $AP+BP$ が最も短くなるのは、点 P が 2 点 A, B を端点とする線分上にあるときである。このとき

$$r = AP+BP = AB = 2\sqrt{6}$$

が成り立つ。 $r > 2\sqrt{6}$ かつ点 P が直線 AB 上に存在するとき、点 P は直線 AB 上に存在しかつ線分 AB 上に存在しない。よって、

[1] 点 P が点 A に関して点 B と反対側にあるとき

$$\overrightarrow{AP} = a\overrightarrow{AB} \text{ (} a \text{ は負の実数) とおくと } |\overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{6} \text{ より } |\overrightarrow{AP}| = -2\sqrt{6}a \text{ (} \because a < 0 \text{) となり}$$

$$\begin{aligned}AP+BP &= r \\ \Leftrightarrow -2\sqrt{6}a + \{2\sqrt{6} + (-2\sqrt{6}a)\} &= r \\ \Leftrightarrow a &= \frac{-\sqrt{6}r+12}{24}\end{aligned}$$

となる。

[2] 点 P が点 B に関して点 A と反対側にあるとき

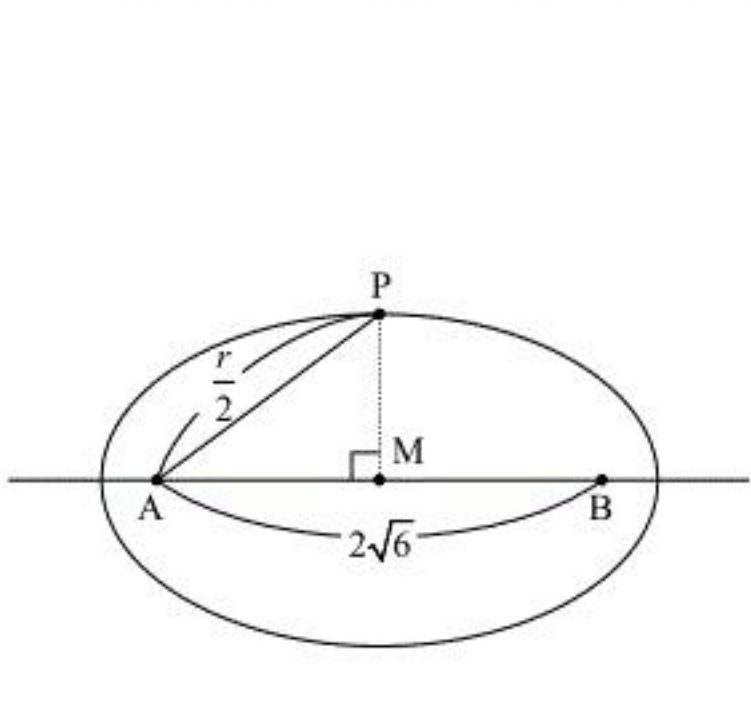
$$\text{[1]と同様にして } \overrightarrow{AP} = b\overrightarrow{AB} \text{ (} b \text{ は正の実数)とおくと } |\overrightarrow{AP}| = 2\sqrt{6}b \text{ (} \because b > 0 \text{) となり}$$

$$\begin{aligned}AP+BP &= r \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{6}b + (2\sqrt{6}b - 2\sqrt{6}) &= r \\ \Leftrightarrow b &= \frac{\sqrt{6}r+12}{24}\end{aligned}$$

となる。

したがって、[1], [2]より $\overrightarrow{AP} = \frac{-\sqrt{6}r+12}{24}\overrightarrow{AB}$ または $\overrightarrow{AP} = \frac{\sqrt{6}r+12}{24}\overrightarrow{AB}$ である。ここで、 $r > 2\sqrt{6}$

のとき、 $AP+BP=r$ で一定ならば点 P は定義より点 A, B を焦点とする楕円上を動く。



点 P が動く楕円は上図のようになり、AB の中点を点 M とすると、短軸と楕円の交点と点 M を結ぶ線分の長さが求める距離の最大値となる。したがって求める距離は上図と三平方の定理より、

$$\sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 - \left(\frac{2\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{r^2-24}}{2}$$

となる。

IV

【解答】

〔1〕	ア	イ	ウ		
	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{256}$	13		
〔2〕	エ	オ	カ	キ	ク
	$\frac{5}{8}$	10	4	$\frac{297}{2048}$	$\frac{1053}{4096}$

【解説】

〔1〕

試行を2回繰り返したときの記録された数字の並び順は 4^2 通りあり、これらは同様に確からしく起こる。 S_2 が4以下となる数字の並び順は

$$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)$$

の6通りである。よって、その確率は

$$\frac{6}{4^2} = \frac{3}{8}$$

である。試行を4回繰り返したときの記録された数字の並び順は 4^4 通りあり、これらは同様に確からしく起こる。 $S_4=16$ となるのは $(4, 4, 4, 4)$ と取り出される場合の1通りのみである。

よって、その確率は

$$\frac{1}{4^4} = \frac{1}{256}$$

である。次に、試行を10回繰り返して S_2 が6以上であり、 $S_{10}=15$ である確率を考える。以下、 S_2 の値により場合分けを行う。

〔1〕 $S_2=6$ のとき

$S_2=6$ となる数字の並び順は $(2, 4), (3, 3), (4, 2)$ の3通りである。また、 $S_{10}=15$ となるための条件は残り8個の数字の和が9となることである。このような数字の組み合わせは、1が7個と2が1個であるときのみであり、並び順は ${}_8C_1=8$ (通り)である。したがって、 $S_{10}=15$ となる確率は、

$$\frac{3}{4^2} \cdot \frac{8}{4^8} = \frac{24}{4^{10}}$$

である。

〔2〕 $S_2=7$ のとき

$S_2=7$ となる数字の並び順は $(3, 4), (4, 3)$ の2通りである。また、 $S_{10}=15$ となるための条件は残り8個の数字の和が8となることである。このような数字の組み合わせは、1が8個であるときのみであり、並び順は1通りである。したがって、 $S_{10}=15$ となる確率は、

$$\frac{2}{4^2} \cdot \frac{1}{4^8} = \frac{2}{4^{10}}$$

である。

〔3〕 $S_2 \geq 8$ のとき

$S_{10}=15$ となるための必要条件は残り8個の数字の和が7以下となることであるが、球には1以上の数字が書かれていることから、8個の数字の和は8以上となるため不適である。

以上〔1〕～〔3〕より、求める確率は

$$\frac{24}{4^{10}} + \frac{2}{4^{10}} = \frac{13}{2^{19}}$$

である。

〔2〕

A君とB君の球の取り出し方は $4 \cdot 4=16$ 通りでこれらは同様に確からしく起こる。双方が1点を得る球の取り出し方(A, B)は $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)$ の4通りであるから、その確率は

$$\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

である。また、A君が3点を得る確率とB君が3点を得る確率は対称性から等しいため、その確率はそれぞれ

$$\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}$$

である。したがってA君が得点する確率は

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

となる。次に、試行回数が最大となる場合を考える。9回の試行を行ったとき、すべての試行で取り出された2つの数字が同じであった場合、A君とB君の得点はともに9点であり、10回目で試行が終了する。ここで、9回の試行を続けたとき、少なくとも1回の試行で取り出された2つの数字が異なっていたとすると、両者の得点の合計をSとすれば

$$S \geq 2 \cdot 8 + 3 \cdot 1 = 19$$

となる。よって、両者どちらかの得点が10点以上となっており、9回目までに試行が終了する。よって、試行は最大で10回行われるとわかる。続いて、試行回数が最小となる場合を考える。A君が4回の試行で3点ずつ得た場合、合計点は10点以上となり、試行は終了する。試行回数が3回以下であるとき、両者の合計得点は

$$3 \times 3 = 9 \text{ (点)}$$

より、9点以下であるため、試行は終了しない。したがって、試行は最小で4回行われるとわかる。4回の試行でA君が10点以上となって試行が終了するのは3点を4回得る、または3点を3回と1点を1回得る場合であり、その確率は

$$\left(\frac{3}{8}\right)^4 + {}_4C_3 \left(\frac{3}{8}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{297}{4096}$$

となる。対称性より、4回の試行でB君が10点以上となって試行が終了する確率も同様に

$\frac{297}{4096}$ である。また、試行回数が4回であるとき、両者の合計得点は

$$4 \times 3 = 12 \text{ (点)}$$

より、12点以下であるため、A君とB君が両方10点以上となることはない。したがって、試行がちょうど4回で終わる確率は

$$\frac{297}{4096} \times 2 = \frac{297}{2048}$$

である。次に、試行がちょうど5回で終わる確率を考える。5回の試行でA君が10点以上となって試行が終了する確率は次のように場合分けして考えられる。

〔1〕 4回目の試行までで3点を3回、0点を1回得て、5回目で得点する場合

このときの確率は

$${}_4C_3 \left(\frac{3}{8}\right)^3 \left(\frac{3}{8}\right) \times \left(\frac{5}{8}\right) = \frac{3^4 \cdot 20}{2^{15}}$$

である。

〔2〕 4回目の試行までで3点を2回、1点を2回得て、5回目で3点を得る場合

このときの確率は

$${}_4C_2 \left(\frac{3}{8}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{8}\right) = \frac{3^4 \cdot 8}{2^{15}}$$

である。

〔3〕 4回目の試行までで3点を2回、1点を1回、0点を1回得て、5回目で3点を得る場合

このときの確率は

$$\frac{4!}{2!1!1!} \left(\frac{3}{8}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{3}{8}\right) \times \left(\frac{3}{8}\right) = \frac{3^4 \cdot 24}{2^{15}}$$

である。

以上〔1〕,〔2〕,〔3〕より、5回の試行でA君が10点以上となって試行が終了する確率は

$$\frac{3^4 \cdot 20}{2^{15}} + \frac{3^4 \cdot 8}{2^{15}} + \frac{3^4 \cdot 24}{2^{15}} = \frac{3^4 \cdot 52}{2^{15}}$$

である。対称性より、5回の試行でB君が10点以上となって試行が終了する確率も同様に

$\frac{3^4 \cdot 52}{2^{15}}$ である。また、試行回数が5回であるとき、両者の合計得点は

$$5 \times 3 = 15 \text{ (点)}$$

より、15点以下であるため、A君とB君が両方10点以上となることはない。したがって、試行がちょうど5回で終わる確率は

$$\frac{3^4 \cdot 52}{2^{15}} \times 2 = \frac{1053}{4096}$$

である。