

【解答】

ア	3	イ	$\frac{7}{2}$	ウ	$\frac{1}{2}$	エ	2
オ	$4-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$						
カ	3	キ	1	ク	-2		
ケ	-3	コ	8	サ	$\frac{16}{3}$		
シ	t^3-t^2-t+1	ス	-1	セ	$\sqrt{2}$		
ソ	0	タ	$\frac{32}{27}$				

【解説】

〔1〕

$$S_n+a_n=4n+2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

とする。 $S_1=a_1$ であるから、 $n=1$ のときの①より、

$$2a_1=4+2 \Leftrightarrow a_1=3$$

となる。また、 $S_2=a_1+a_2$ であるから、 $n=2$ のときの①より、

$$2a_2+a_1=4\cdot 2+2 \Leftrightarrow a_2=\frac{7}{2}$$

となる。また、①より、

$$S_{n+1}+a_{n+1}=4(n+1)+2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

も成り立つ。②から①を辺々引くと、 $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$ より、

$$\begin{aligned} 2a_{n+1}-a_n &= 4 \\ \Leftrightarrow a_{n+1} &= \frac{1}{2}a_n+2 \\ \Leftrightarrow a_{n+1}-4 &= \frac{1}{2}(a_n-4) \end{aligned}$$

となる。よって、 $\{a_n-4\}$ は初項 $3-4=-1$ 、公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから、

$$\begin{aligned} a_n-4 &= -1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ \Leftrightarrow a_n &= 4-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

となる。

〔2〕

$y=x^2+x+2$ の両辺を x で微分すると、 $y'=2x+1$ であるから、点 $(1, 4)$ における接線の傾きは $2\cdot 1+1=3$ である。よって、 l の方程式は、

$$y-4=3(x-1) \Leftrightarrow y=3x+1$$

である。また、 $x=-1$ のとき $y=-2$ であるから、 $(-1, -2)$ は l 上の点である。ここで、 C と m の

接点は実数 t を用いて、 (t, t^2+t+2) と表せる。 (t, t^2+t+2) での C の接線は、

$$\begin{aligned} y-(t^2+t+2) &= (2t+1)(x-t) \\ \Leftrightarrow y &= (2t+1)x-t^2+2 \end{aligned}$$

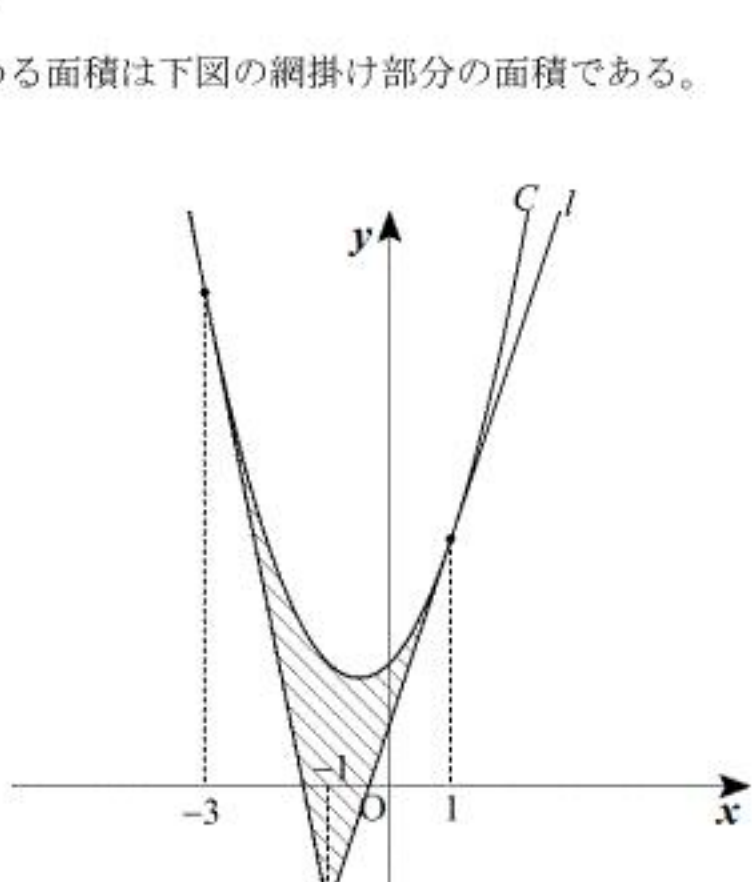
となる。これが $(-1, -2)$ を通るから、

$$\begin{aligned} -2 &= -2t-1-t^2+2 \\ \Leftrightarrow t^2+2t-3 &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= 1, -3 \end{aligned}$$

である。 $t=1$ のとき、求まる接線が l と一致するため、 $t=-3$ である。よって、 C と m の接点は $(-3, 8)$ であり、

$$m:y=-5x-7$$

となる。よって、求める面積は下図の網掛け部分の面積である。



よって、求める面積を S とすると、上図より

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 \{(x^2+x+2)-(3x+1)\} dx + \int_{-3}^{-1} \{(x^2+x+2)-(-5x-7)\} dx \\ &= \int_{-1}^1 (x^2-2x+1) dx + \int_{-3}^{-1} (x^2+6x+9) dx \\ &= \int_{-1}^1 (x-1)^2 dx + \int_{-3}^{-1} (x+3)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x-1)^3 \right]_{-1}^1 + \left[\frac{1}{3}(x+3)^3 \right]_{-3}^{-1} \\ &= \frac{8}{3} + \frac{8}{3} \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

となる。

〔3〕

$t=\sin\theta+\cos\theta$ の両辺を2乗すると、

$$\begin{aligned} t^2 &= \sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta \\ \Leftrightarrow t^2-1 &= \sin 2\theta \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned} y &= \sin 2\theta(\sin\theta+\cos\theta-1) \\ &= (t^2-1)(t-1) \\ &= t^3-t^2-t+1 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ と表わすことができる。 $0\leq\theta\leq\pi\Leftrightarrow\frac{\pi}{4}\leq\theta+\frac{\pi}{4}\leq\frac{5\pi}{4}$ で

あるから、 $-\frac{1}{\sqrt{2}}\leq\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leq 1$ である。よって、 t の取りうる値の範囲は、

$$-1\leq t\leq\sqrt{2}$$

である。また y を t で微分すると、

$$\frac{dy}{dt}=3t^2-2t-1=(3t+1)(t-1)$$

となる。 $\frac{dy}{dt}=0\Leftrightarrow t=1, -\frac{1}{3}$ であるから、増減表を書くと

t	-1	...	$-\frac{1}{3}$	...	1	...	$\sqrt{2}$
$\frac{dy}{dt}$		+	0	-	0	+	
y	0	$\nearrow$	$\frac{32}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}-1$

となる。よって、 t の取りうる値の範囲は $0\leq t\leq\frac{32}{27}$ である。

Ⅱ

〔解答〕

ア	$6x-26$	イ	5	ウ	52	エ	$\frac{416}{3}$
オ	10	カ	$\frac{8}{3}$	キ	4	ク	60

〔解説〕

〔1〕

x は 6 人の平均点なので、

$$\frac{6+4+2+6+8+a}{6}=x$$
$$\Leftrightarrow a=6x-26$$

となる。よって、6 人の得点の分散は、

$$\frac{1}{6}\left\{2\cdot(6-x)^2+(4-x)^2+(2-x)^2+(8-x)^2+(6x-26-x)^2\right\}$$
$$=\frac{1}{6}(30x^2-312x+832)$$
$$=5x^2-52x+\frac{416}{3}$$

となる。

〔2〕

6 人の得点の分散が $\frac{20}{3}$ であるので、

$$5x^2-52x+\frac{416}{3}=\frac{20}{3}$$
$$\Leftrightarrow 5x^2-52x+132=0$$
$$\Leftrightarrow (x-6)(5x-22)=0$$
$$\Leftrightarrow x=6, \frac{22}{5}$$

となる。 a は正の整数であるため、 $x=\frac{22}{5}$ のとき $a=6\cdot\frac{22}{5}-26=\frac{2}{5}$ なので不適である。よって、

$$a=6\cdot 6-26=10$$

である。

〔3〕

グループ A に属する生徒の得点の分散は、平均点が $\frac{1}{3}(6+4+2)=4$ であるから、

$$\frac{1}{3}\left\{(6-4)^2+(4-4)^2+(2-4)^2\right\}=\frac{1}{3}(4+4)$$
$$=\frac{8}{3}$$

である。同様に、グループ B に属する生徒の得点の分散は、平均点が $\frac{1}{3}(6+8+10)=8$ であるから、

$$\frac{1}{3}\left\{(6-8)^2+(8-8)^2+(10-8)^2\right\}=\frac{1}{3}(4+4)$$
$$=\frac{8}{3}$$

である。よって、2 つの分散の値の平均は $\frac{8}{3}$ である。また、2 つの平均点の分散は、

$$\frac{1}{2}\left\{(8-6)^2+(4-6)^2\right\}=4$$

である。したがって、各グループの平均点の分散が、6 人の得点の分散に占める割合は

$$\frac{\frac{4}{\frac{20}{3}}}{\frac{8}{3}}\cdot 100=60\%$$

である。

Ⅲ

〔1〕

円 C の式は、

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 8x - 4y + 17 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x^2 - 8x + 16) - 16 + (y^2 - 4y + 4) - 4 + 17 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 4)^2 + (y - 2)^2 &= 3\end{aligned}$$

と変形できる。よって、 C の中心の座標は $(4, 2)$ 、半径は $\sqrt{3}$ である。

(答) 中心 $(4, 2)$ 、半径 $\sqrt{3}$

〔2〕

C の式に $y = mx$ を代入して y を消去すると、

$$(1 + m^2)x^2 - (8 + 4m)x + 17 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。ここで、 $1 + m^2 \neq 0$ であるため、 $\textcircled{1}$ は 2 次方程式である。したがって、 $\textcircled{1}$ の判別式を D とすると、

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= (4 + 2m)^2 - 17(1 + m^2) \\ &= -13m^2 + 16m - 1\end{aligned}$$

となる。直線 $y = mx$ が C と接するとき、 $D = 0$ である。よって、

$$\begin{aligned}-13m^2 + 16m - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow m &= \frac{8 \pm \sqrt{51}}{13}\end{aligned}$$

である。

(答) $m = \frac{8 \pm \sqrt{51}}{13}$

〔3〕

(p, q) が円 C の周および内部にあるとき、

$$(p - 4)^2 + (q - 2)^2 \leq 3$$

である。 $(p - 4)^2 \leq 3$ より、 $3 \leq p \leq 5$ である。

[1] $p = 3$ のとき

$(q - 2)^2 \leq 2$ を満たす、 $1 \leq q \leq 6$ となる整数 q は $1, 2, 3$ である。

[2] $p = 4$ のとき

$(q - 2)^2 \leq 3$ を満たす、 $1 \leq q \leq 6$ となる整数 q は $1, 2, 3$ である。

[3] $p = 5$ のとき

$(q - 2)^2 \leq 2$ を満たす、 $1 \leq q \leq 6$ となる整数 q は $1, 2, 3$ である。

以上[1]～[3]より、円 C の周および内部にある (p, q) の個数は 9 である。2 つのさいころの目の出方は全部で $6^2 = 36$ 通りであり、すべて等確率であるため、求める確率は

$$\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

である。

(答) $\frac{1}{4}$

〔4〕

(a)

直線 $y = -2x$ と l とが垂直に交わるとき、

$$\begin{aligned}-2 \cdot \frac{q}{p} &= -1 \\ \Leftrightarrow 2q &= p\end{aligned}$$

となる。これを満たす (p, q) の個数は $(2, 1), (4, 2), (6, 3)$ の 3 つであるから、求める確率は

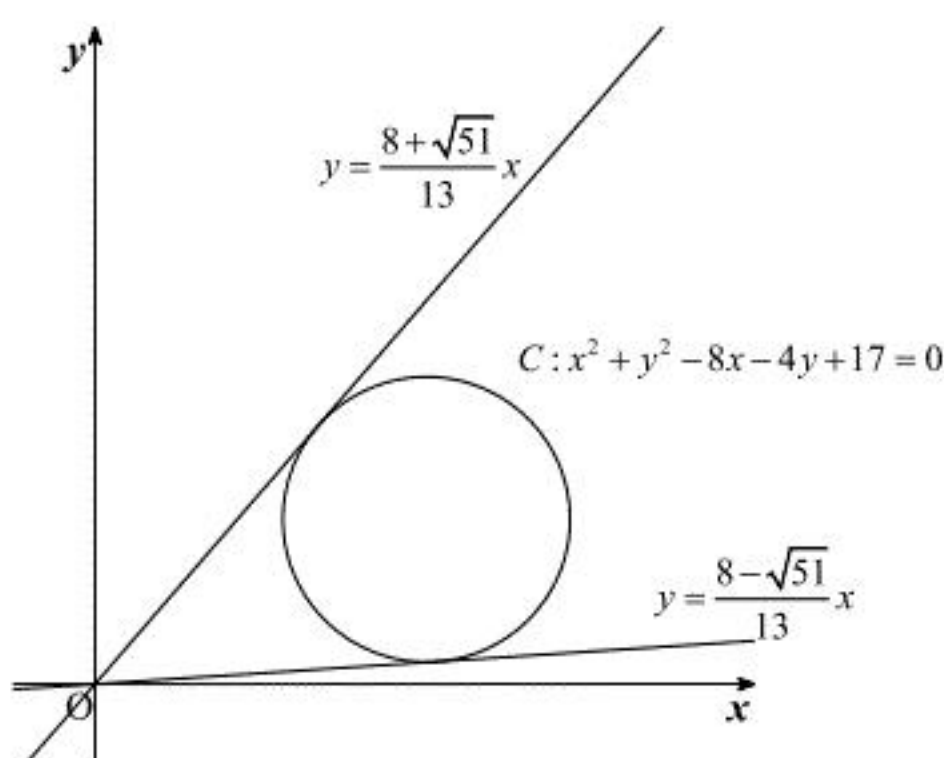
$$\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

である。

(答) $\frac{1}{12}$

(b)

〔2〕より、原点を通る直線 $y = mx$ が C と接するとき、 $m = \frac{8 \pm \sqrt{51}}{13}$ であり、図を描くと以下のようになる。



図より、 C と l が共有点をもつのは、 $\frac{8 - \sqrt{51}}{13} \leq \frac{q}{p} \leq \frac{8 + \sqrt{51}}{13}$ となる場合である。ここで、 $\frac{q}{p}$

の最小値は $\frac{1}{6}$ である。また、 $1 < \frac{q}{p}$ を満たす最小の $\frac{q}{p}$ は $\frac{6}{5}$ である。ここで、

$$\begin{aligned}\frac{8 - \sqrt{51}}{13} &= \frac{1}{8 + \sqrt{51}} < \frac{1}{6} \\ \frac{8 + \sqrt{51}}{13} - 1 &= \frac{-5 + \sqrt{51}}{13} = \frac{2}{5 + \sqrt{51}} < \frac{1}{5} \\ \therefore 1 &< \frac{8 + \sqrt{51}}{13} < \frac{6}{5}\end{aligned}$$

であることを踏まえると、 C と l が共有点をもつのは、 $\frac{q}{p} \leq 1$ の場合と言い換えることが可能である。

$\frac{q}{p} = 1$ となる確率は、 $\frac{1}{6}$ である。また、対称性から $\frac{q}{p} < 1$ となる確率は $\frac{q}{p} > 1$ となる

確率と等しく、両者の和は $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ であるから、 $\frac{q}{p} < 1$ となる確率は $\frac{5}{12}$ である。以上から、 $\frac{q}{p}$

≤ 1 となる確率は $\frac{1}{6} + \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$ であり、求める確率も $\frac{7}{12}$ とわかる。

(答) $\frac{7}{12}$