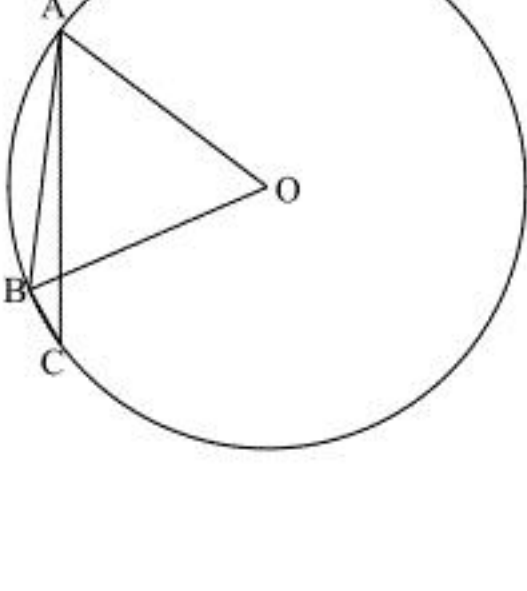


【解答】

ア	30°	イ	$-\frac{4}{5}$	ウ	$-4+3\sqrt{3}$	エ	$\frac{3}{4}$
オ	$\frac{48+25\sqrt{3}}{39}$						
カ	$\left(\frac{10}{9}\right)^n$	キ	21	ク	$10\left\{\left(\frac{10}{9}\right)^n-1\right\}$		
ケ	10	コ	22	サ	8		
シ	2	ス	$\frac{3\sqrt{5}}{5}$	セ	$\frac{3(3-\sqrt{5})}{2}$		

【解説】

[1]



△ABCが内接する円の中心をOとする。OA=OB=AB=5、AC=6であることから、△ABCは正三角形となり∠AOB=60°である。よって円周角の定理より∠BCA=30°となる。さらに△ABCにおいて正弦定理より

$$\frac{6}{\sin \angle ABC}=2 \cdot 5$$

$$\Leftrightarrow \sin \angle ABC=\frac{3}{5}$$

であるが、∠ABCは鈍角なので $\cos \angle ABC=-\frac{4}{5}$ が得られる。ここで△ABCにおいて余弦定理より

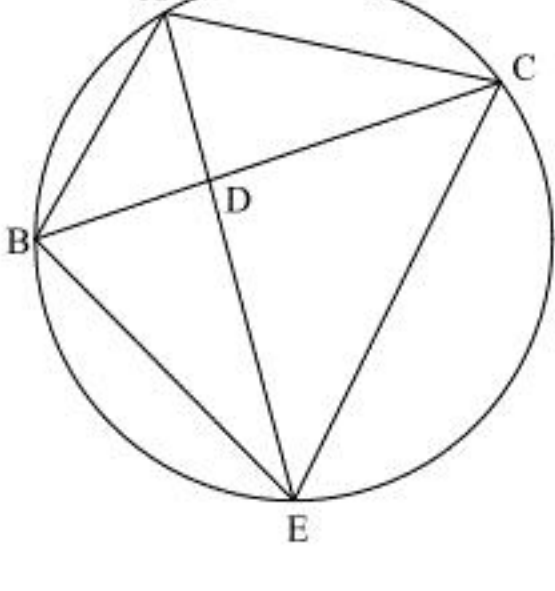
$$AC^2=AB^2+BC^2-2AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC$$

$$\Leftrightarrow 36=25+BC^2+8BC$$

$$\Leftrightarrow BC^2+8BC-11=0$$

$$\Leftrightarrow BC=-4 \pm 3\sqrt{3}$$

となるが、BC>0よりBC=-4+3√3となる。次に∠ABCが鋭角の時について考えると、下図のようになる。



∠ABCが鋭角の時、 $\sin \angle ABC=\frac{3}{5}$ 、 $\cos \angle ABC=\frac{4}{5}$ より $\tan \angle ABC=\frac{3}{4}$ が得られる。また上図より加法定理を用いて

$$\tan \angle BEC=\tan (\angle AEB+\angle AEC)=\frac{\tan \angle AEB+\tan \angle AEC}{1-\tan \angle AEB \cdot \tan \angle AEC}$$

が成立する。さらに円周角の定理より

$$\angle AEB=\angle BCA=30^{\circ}, \angle AEC=\angle ABC$$

であるから

$$\tan \angle AEB=\tan \angle BCA=\frac{1}{\sqrt{3}}, \tan \angle AEC=\tan \angle ABC=\frac{3}{4}$$

が成立するため、

$$\begin{aligned} \tan \angle BEC &= \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{4}} \\ &= \frac{4 + 3\sqrt{3}}{4\sqrt{3} - 3} \\ &= \frac{48 + 25\sqrt{3}}{39} \end{aligned}$$

が得られる。

[2]

初項 $\frac{10}{9}$ 、公比 $\frac{10}{9}$ の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n は

$$a_n=\frac{10}{9} \cdot\left(\frac{10}{9}\right)^{n-1}=\left(\frac{10}{9}\right)^n$$

となる。さらに $a_n>9$ を満たす最小の n の値を求めると

$$a_n>9$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{10}{9}\right)^n>9$$

$$\Leftrightarrow n \log _{10} \frac{10}{9}>\log _{10} 9\left(\because\left(\frac{10}{9}\right)^n>0,9>0\right)$$

$$\Leftrightarrow n\left(1-2 \log _{10} 3\right)>2 \log _{10} 3$$

$$\Leftrightarrow n>\frac{2 \log _{10} 3}{1-2 \log _{10} 3}$$

$$\Leftrightarrow n>\frac{0.954}{0.046}\left(\because \log _{10} 3=0.477\right)$$

$$\Leftrightarrow n>20.739 \cdots$$

となることから、 $a_n>9$ を満たす最小の n の値は21となる。また、初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n=\frac{1-\left(\frac{10}{9}\right)^n}{1-\frac{10}{9}} \cdot \frac{10}{9}$$

$$=10\left\{\left(\frac{10}{9}\right)^n-1\right\}$$

$$=10 a_n-10$$

と求められる。さらに $S_n>90$ を満たす最小の n の値を求めると

$$10\left(\frac{10}{9}\right)^n-10>90$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{10}{9}\right)^n>10$$

$$\Leftrightarrow n\left(1-2 \log _{10} 3\right)>1\left(\because\left(\frac{10}{9}\right)^n>0,10>0\right)$$

$$\Leftrightarrow n>\frac{1}{1-2 \log _{10} 3}$$

$$\Leftrightarrow n>21.739 \cdots\left(\because \log _{10} 3=0.477\right)$$

となることから、 $S_n>90$ を満たす最小の n の値は22となる。また、 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの積を P_n とすると

$$P_n=\left(\frac{10}{9}\right)^{\sum_{i=1}^n i}=\left(\frac{10}{9}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

となるため、 $P_n>S_n+10$ を満たす最小の n の値を求めると

$$\left(\frac{10}{9}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}>10 \cdot\left(\frac{10}{9}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{10}{9}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}>10$$

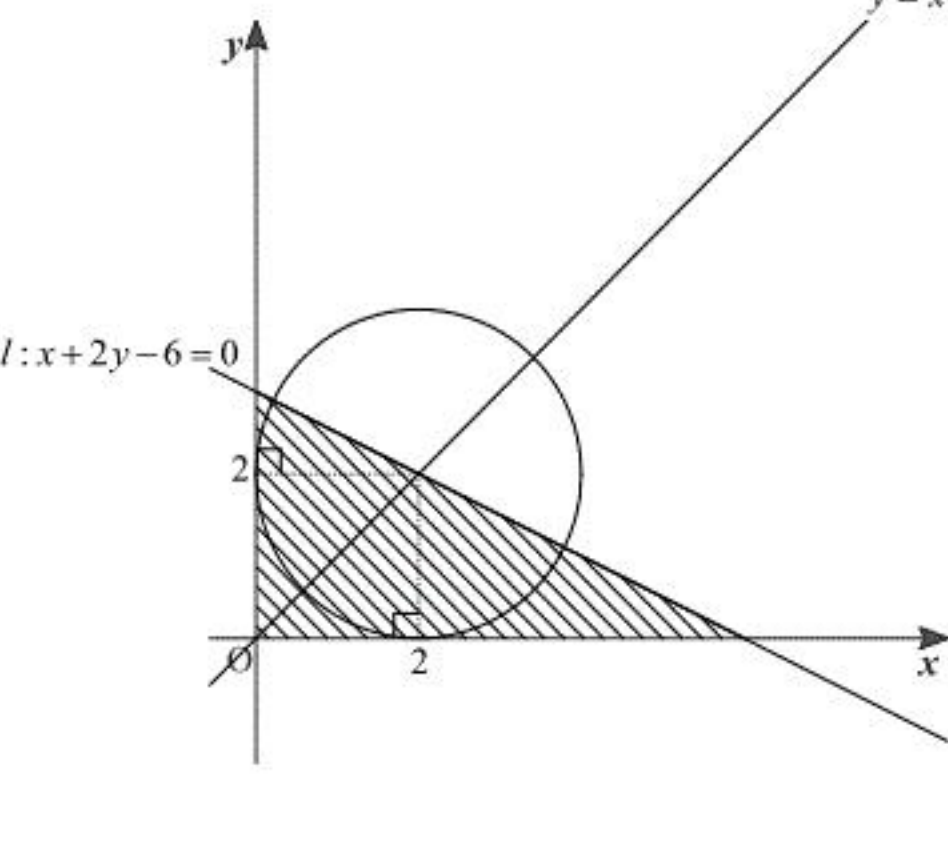
$$\Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2}\left(1-2 \log _{10} 3\right)>1\left(\because\left(\frac{10}{9}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}>0,10>0\right)$$

$$\Leftrightarrow n(n-1)>\frac{2}{1-2 \log _{10} 3}$$

$$\Leftrightarrow n(n-1)>43.478 \cdots\left(\because \log _{10} 3=0.477\right)$$

となる。 $n(n-1)$ は単調増加であり、 $7 \cdot 6=42,8 \cdot 7=56$ より、 $P_n>S_n+10$ を満たす最小の n の値は8となる。

[3] (a)



円Cの中心が領域Dに含まれ、かつ円Cがx軸と接するとき、円Cの半径が最大値となるのは上図のような場合である。よって円Cの半径の最大値は2となる。

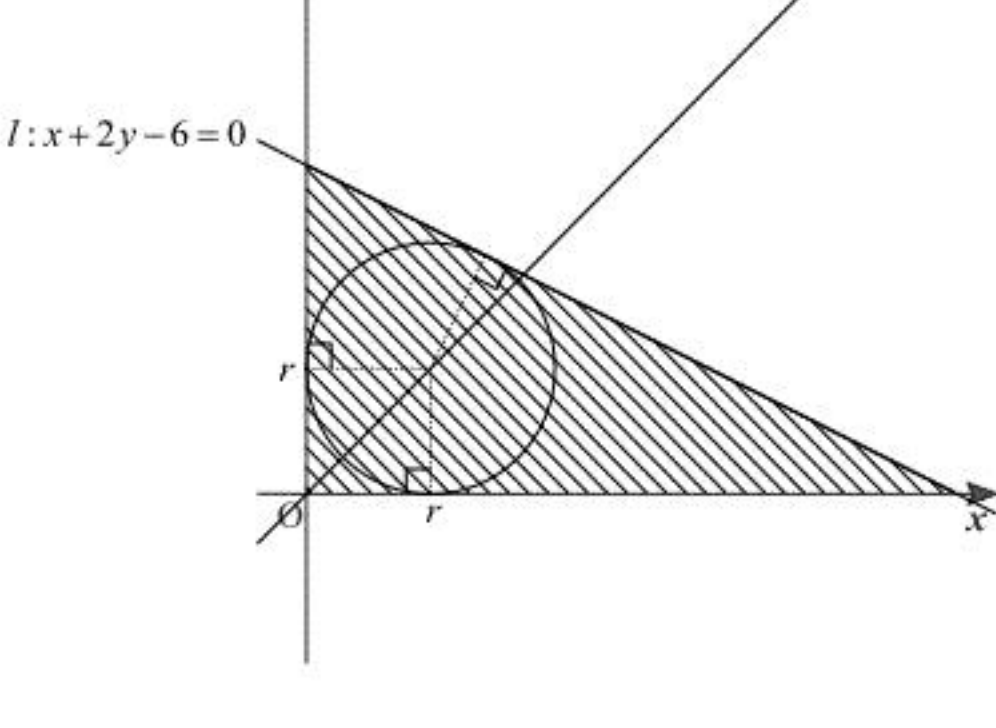
(b)

点(1,1)と直線lの間の距離は、点と直線の距離公式より

$$\frac{|1+2 \cdot 1-6|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{3 \sqrt{5}}{5}$$

となる。

(c)



円C全体が領域Dに含まれるとき半径が最大となるのは、上図のように円Cがx軸、y軸、直線lと接するときである。ここで円Cの半径をrとすると、円Cとx軸、y軸が接するため円Cの中心は(r,r)となり、円Cの中心と直線lの距離は

$$\frac{|r+2 r-6|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|3 r-6|}{\sqrt{5}}$$

となる。よって

$$\frac{|3 r-6|}{\sqrt{5}}=r$$

$$\Leftrightarrow 3 r-6=\pm \sqrt{5} r$$

$$\Leftrightarrow r=\frac{6}{3 \pm \sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow r=\frac{3(3 \mp \sqrt{5})}{2}$$

が得られるが、この2つの値の内て円Cの中心が領域Dに含まれるのは

$$r=\frac{3(3-\sqrt{5})}{2}$$

のときである。

Ⅱ

〔解答〕

ア	$\frac{P-4}{2}$	イ	13	ウ	3	エ	39
オ	8	カ	64				

〔解説〕

〔1〕

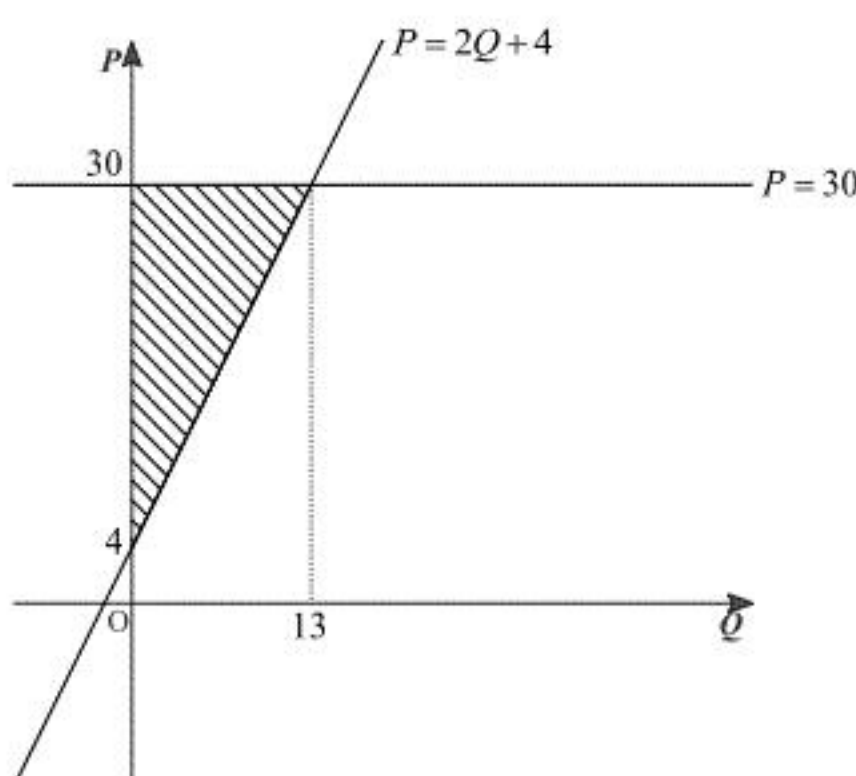
企業の利潤は

$$\begin{aligned}
 PQ - (Q^2 + 4Q + 3) &= -Q^2 + (P-4)Q - 3 \\
 &= -\left(Q - \frac{P-4}{2}\right)^2 + \left(\frac{P-4}{2}\right)^2 - 3 \quad \dots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

と表されるため、この企業の供給関数は

$$Q = \frac{P-4}{2} \quad (\Leftrightarrow P = 2Q + 4)$$

となる。ここで $P=30$ を代入すると、 $Q_1=13$ が得られる。さらに縦軸に価格、横軸に生産量をとったグラフにおいて、供給関数のグラフ、および縦軸で囲まれた領域は下図のようになる。



よって、求める面積 Z は

$$Z = \frac{1}{2} \cdot 26 \cdot 13 = 169$$

となる。ここで価格が $P=30$ の時、企業の利潤の最大値は

$$\left(\frac{30-4}{2}\right)^2 - 3 = 166$$

であることから、面積と企業の利潤の最大値との差は3である。また、面積から汚染の除去費用を引いたものは

$$169 - 10 \cdot 13 = 39$$

である。

〔2〕

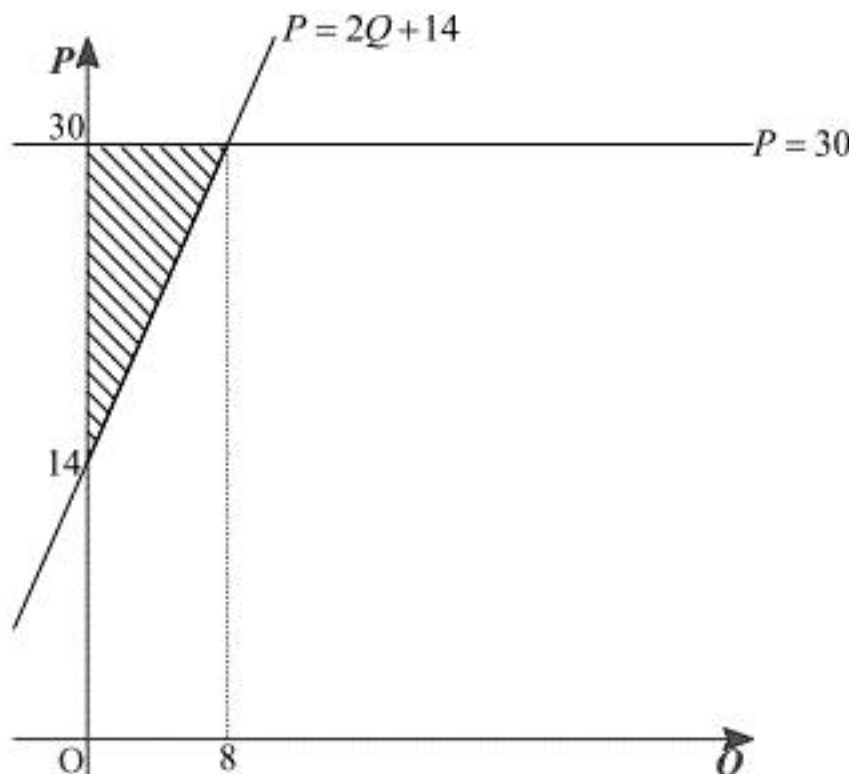
企業の利潤は

$$\begin{aligned}
 PQ - (Q^2 + 4Q + 3) - 10Q &= -Q^2 + (P-14)Q - 3 \\
 &= -\left\{Q - \frac{P-14}{2}\right\}^2 + \left(\frac{P-14}{2}\right)^2 - 3 \quad \dots \textcircled{2}
 \end{aligned}$$

と表されるため、②式の供給関数は

$$Q = \frac{P-14}{2} \quad (\Leftrightarrow P = 2Q + 14)$$

となる。ここで $P=30$ を代入すると $Q_2=8$ が得られる。さらに②式のもとでの供給関数のグラフ、 $P=30$ 、および縦軸で囲まれた領域は下図のようになる。



よって、求める面積は

$$\frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 8 = 64$$

となる。

Ⅲ

[1]

曲線 $C: y = x^3 - 3x$ について $y' = 3x^2 - 3$ より曲線 C 上の点 $P(a, a^3 - 3a)$ における接線の傾きは $3a^2 - 3$ となる。よって点 P における接線は

$$\begin{aligned} y &= (3a^2 - 3)(x - a) + a^3 - 3a \\ \Leftrightarrow y &= (3a^2 - 3)x - 2a^3 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = (3a^2 - 3)x - 2a^3$$

[2]

点 P における接線の傾きが 6 のとき、 a の値は

$$\begin{aligned} 3a^2 - 3 &= 6 \\ \Leftrightarrow a^2 &= 3 \\ \therefore a &= \pm\sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a = \pm\sqrt{3}$$

[3]

C に同じ傾きの接線を 2 本引けるということは、その接線の傾きを m としたとき

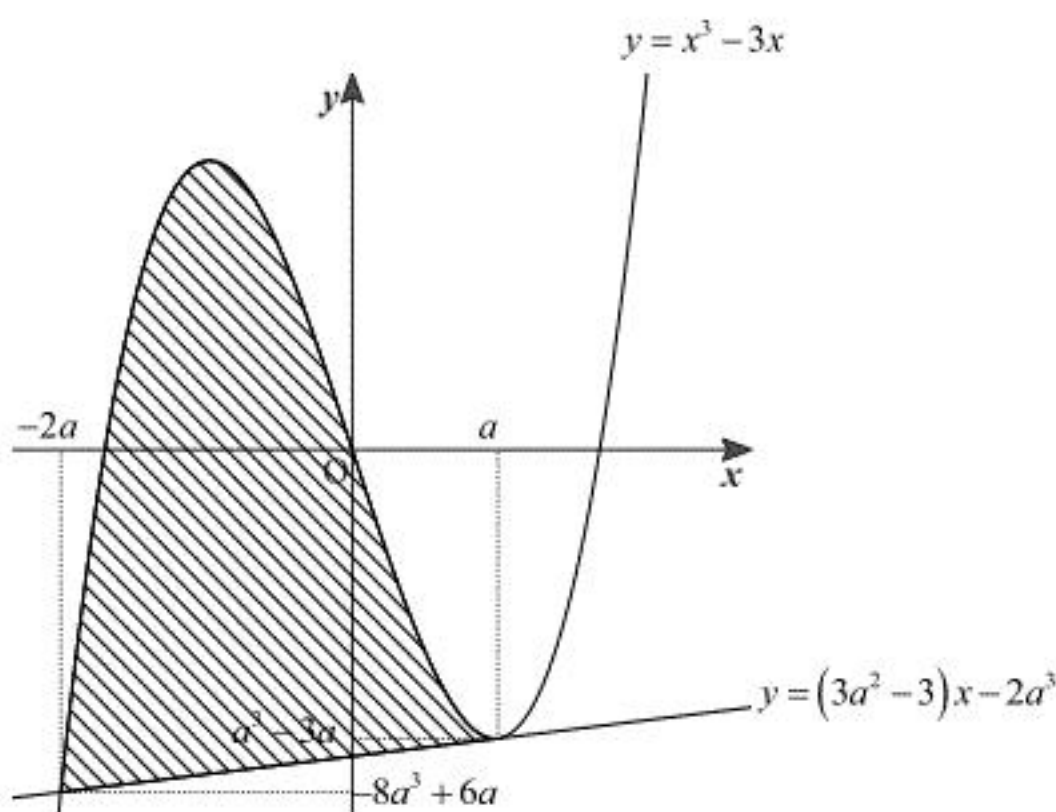
$$3a^2 - 3 = m \Leftrightarrow a^2 = \frac{m+3}{3}$$

を満たすような 2 つの異なる a が存在することと同値である。よって $a^2 > 0$ であれば良いことから、 $m > -3$ となる。

$$(\text{答}) \quad m > -3$$

[4]

C と l とで囲まれた領域は以下の斜線部のようになる。



ここで

$$\begin{aligned} x^3 - 3x - \{(3a^2 - 3)x - 2a^3\} &= 0 \\ \Leftrightarrow x^3 - 3a^2x + 2a^3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - a)^2(x + 2a) &= 0 \end{aligned}$$

より、 C と l は $x = a, -2a$ で交点を持つ。よって求める面積は

$$\begin{aligned} \int_{-2a}^a \{(x^3 - 3x) - (3a^2 - 3)x + 2a^3\} dx &= \int_{-2a}^a (x - a)^2(x + 2a) dx \\ &= \int_{-2a}^a (x - a)^2 \{(x - a) + 3a\} dx \\ &= \int_{-2a}^a \{(x - a)^3 + 3a(x - a)^2\} dx \\ &= \left[\frac{(x - a)^4}{4} + a(x - a)^3 \right]_{-2a}^a \\ &= \frac{27}{4}a^4 \end{aligned}$$

となるが、面積が 12 であることから

$$\frac{27}{4}a^4 = 12 \Leftrightarrow a^2 = \frac{4}{3} (> 0)$$

となることから、 $3a^2 - 3 = m$ に代入すると $m = 1$ が得られる。

$$(\text{答}) \quad m = 1$$