

【解答】

〔1〕	$\boxed{\text{ア}}$			
	$(3t^2-1)x-2t^3$			
〔2〕	$\boxed{\text{イ}}$	$\boxed{\text{ウ}}$	$\boxed{\text{エ}}$	$\boxed{\text{オ}}$
	$-p$	p^3-p	$\frac{2}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
〔3〕	$\boxed{\text{カ}}$	$\boxed{\text{キ}}$	$\boxed{\text{ク}}$	
	$\frac{3}{2}p$	-1	$-\frac{p+q}{2}$	

【解説】

〔1〕

 $y=x^3-x$ を x で微分すると、

$$y'=3x^2-1$$

となる。よって $x=t$ における接線の方程式は、

$$y=(3t^2-1)\cdot(x-t)+t^3-t$$

$$\Leftrightarrow y=(3t^2-1)x-2t^3$$

である。

〔2〕

〔1〕で求めた接線が点 (p, q) を通る条件は、

$$q=(3t^2-1)p-2t^3$$

$$\Leftrightarrow 2t^3-3pt^2+p+q=0$$

である。ここで、 $f(t)=2t^3-3pt^2+p+q$ とおくと、ちょうど2本の接線が引けるとき、 α, β を実数として、 $f(t)=0$ の実数解が $x=\alpha, \alpha, \beta$ となるから、解と係数の関係より、

$$\begin{cases} 2(\alpha+\alpha+\beta)=-(-3p) \\ 2(\alpha\alpha+\alpha\beta+\beta\alpha)=0 \\ 2\alpha\alpha\beta=-(p+q) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha+2\beta=3p \\ \alpha(\alpha+2\beta)=0 \\ 2\alpha^2\beta=-(p+q) \end{cases}$$

となる。このとき、 $\alpha(\alpha+2\beta)=0$ より、 $\alpha=0$ または $\alpha=-2\beta$ であるから、これらで場合分けする。〔1〕 $\alpha=0$ のとき、

$$2\alpha^2\beta=-(p+q)$$

$$\Leftrightarrow 0=p+q$$

$$\therefore q=-p$$

であるので、 $q=-p$ である。このとき、

$$f(t)=0$$

$$\Leftrightarrow 2t^3-3pt^2=0$$

$$\Leftrightarrow t^2(2t-3p)=0$$

$$\therefore t=0, \frac{3}{2}p$$

となる。よって、このときの接点の座標は、 $(0, 0), \left(\frac{3}{2}p, \frac{27}{8}p^3-\frac{3}{2}p\right)$ である。2つの接点の y 座標が等しくなるのは、

$$\frac{27}{8}p^3-\frac{3}{2}p=0$$

$$\Leftrightarrow p\left(\frac{3}{2}p-1\right)\left(\frac{3}{2}p+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow p=-\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}$$

である。 $p>0$ より、 $p=\frac{2}{3}$ となる。〔2〕 $\alpha=-2\beta$ のとき、

$$4\alpha+2\beta=3p$$

$$\Leftrightarrow -6\beta=3p$$

$$\Leftrightarrow -2\beta=p$$

である。よって、 $\alpha=-2\beta=p, \beta=-\frac{1}{2}p$ となるから、

$$-2\alpha^2\beta=p+q$$

$$\Leftrightarrow p^3=p+q$$

$$\therefore q=p^3-p$$

である。このとき、

$$f(t)=0$$

$$\Leftrightarrow 2t^3-3pt^2+p^3=0$$

$$\Leftrightarrow (t-p)(2t^3-pt-p^2)=0$$

$$\Leftrightarrow (t-p)^2(2t+p)=0$$

$$\therefore t=-\frac{1}{2}p, p$$

となる。よって、このときの接点の座標は、 $\left(-\frac{1}{2}p, -\frac{1}{8}p^3+\frac{1}{2}p\right), (p, p^3-p)$ である。2つの接点の y 座標が等しくなるのは、

$$-\frac{1}{8}p^3+\frac{1}{2}p=p^3-p$$

$$\Leftrightarrow p\left(\frac{9}{8}p^2-\frac{3}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow p\left(p-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\left(p+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=0$$

$$\therefore p=-\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

である。 $p>0$ より、 $p=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ となる。〔1〕, 〔2〕より、 $q=-p, p^3-p$ となる。また、 $p>0$ より、 $-p<p^3-p$ である。2つの接点の y 座標が等しくなるような p は、 $p=\frac{2}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}$ である。

〔3〕

接線が3本あるとき、 α, β, γ を実数として、 $f(t)=0$ の実数解が $x=\alpha, \beta, \gamma$ となるから、解

と係数の関係より、

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=\frac{3}{2}p \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0 \\ \alpha\beta\gamma=-\frac{p+q}{2} \end{cases}$$

となる。ここで、 $y=ax^2+bx+c$ がこの3つの接点を通る条件は、

$$x^3-x=ax^2+bx+c$$

$$\Leftrightarrow x^3-ax^2-(b+1)x-c=0$$

が実数解 $x=\alpha, \beta, \gamma$ を持つことである。したがって、解と係数の関係より、

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=a \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-(b+1) \\ \alpha\beta\gamma=c \end{cases}$$

となるから、

$$a=\frac{3}{2}p, b=-1, c=-\frac{p+q}{2}$$

と求められる。

【解答】

〔1〕	ア	イ	ウ	エ
	$k(k+1)$	$\frac{3}{2}k(k+1)$	10, 11	30, 31, 32
〔2〕	オ	カ	キ	ク
	2	3	dk^2+3k	$\frac{3}{2}dk^2-\frac{3}{2}dk+3k$
〔3〕	ケ	コ	サ	
	dk^2+ak	$\frac{3}{2}dk^2+\frac{1}{2}dk+ak$	$\frac{3k+5}{2}$	

【解説】

〔1〕

各自然数を k について、

$$D_{2k}=\sum_{l=1}^k2l=k(k+1)$$

$$T_{3k}=\sum_{l=1}^k3l=\frac{3}{2}k(k+1)$$

である。次に、 $D_n=30$ となる n を求める。

$$\begin{aligned} D_{2k} &= 30 \\ \Leftrightarrow k(k+1) &= 30 \\ \Leftrightarrow k^2+k-30 &= 0 \\ \Leftrightarrow (k+6)(k-5) &= 0 \\ \therefore k &= 5 \left(\because k > 0 \right) \end{aligned}$$

より、 $D_{10}=30$ が成立する。ここで、 $D_{2(k+1)}=D_{2k}+2(k+1)>D_{2k}$ であり $D_{2k}=D_{2k+1}$ であるから、

$$D_1<D_2=D_3<\cdots<D_8=D_9<D_{10}=D_{11}<D_{12}=\cdots$$

が成立する。よって、 $D_n=30$ が成立する自然数 n は、 $n=10, 11$ である。次に、 $T_n=165$ となる n を求める。

$$\begin{aligned} T_{3k} &= 165 \\ \Leftrightarrow \frac{3}{2}k(k+1) &= 165 \\ \Leftrightarrow k^2+k-110 &= 0 \\ \Leftrightarrow (k+11)(k-10) &= 0 \\ \therefore k &= 10 \left(\because k > 0 \right) \end{aligned}$$

より、 $T_{30}=165$ が成立するから、同様に考えて、

$$\begin{aligned} T_{3k} &= T_{3k+1}=T_{3k+2} \\ T_{3(k+1)} &= T_{3k}+3(k+1)>T_{3k} \end{aligned}$$

より、 $T_n=165$ が成立する自然数 n は $n=30, 31, 32$ である。

〔2〕

数列 $\{a_n\}$ は、初項 3、公差 d の等差数列なので一般項は、 n を自然数として、

$$a_n=d(n-1)+3$$

で表せる。このとき、

$$\begin{aligned} &\text{「すべての } n \text{ について } D_n=0 \text{」} \\ \Leftrightarrow &\text{「} a_n \text{ はすべての } n \text{ について奇数」} \\ \Leftrightarrow &\text{「} d(n-1) \text{ はすべての } n \text{ について偶数」} \\ \Leftrightarrow &\text{「} d \text{ は 2 の倍数」} \end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned} &\text{「すべての } n \text{ について } T_n<T_{n+1} \text{」} \\ \Leftrightarrow &\text{「} a_n \text{ はすべての } n \text{ について 3 の倍数」} \\ \Leftrightarrow &\text{「} d(n-1) \text{ はすべての } n \text{ について 3 の倍数」} \\ \Leftrightarrow &\text{「} d \text{ は 3 の倍数」} \end{aligned}$$

である。 d が 2 の倍数でも 3 の倍数でもないとき、

$$\begin{aligned} a_n &\equiv 0 \pmod{2} \\ \Leftrightarrow d(n-1)+3 &\equiv 0 \pmod{2} \\ \Leftrightarrow 1\cdot(n-1)+1 &\equiv 0 \pmod{2} \\ \Leftrightarrow n &\equiv 0 \pmod{2} \\ a_n &\equiv 0 \pmod{3} \\ \Leftrightarrow d(n-1)+3 &\equiv 0 \pmod{3} \\ \Leftrightarrow d(n-1) &\equiv 0 \pmod{3} \\ \Leftrightarrow n &\equiv 1 \pmod{3} \end{aligned}$$

となるから、 a_n が偶数となる条件は n が偶数となること、 a_n が 3 の倍数となる条件は n を 3 で割った余りが 1 となることである。よって、

$$\begin{aligned} D_{2k} &= \sum_{l=1}^ka_{2l} \\ &= \sum_{l=1}^k\{d(2l-1)+3\} \\ &= \frac{1}{2}k\{d(2\cdot1-1)+3+d(2k-1)+3\} \\ &= dk^2+3k \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} T_{3k} &= \sum_{l=1}^ka_{3l-2} \\ &= \sum_{l=1}^k\{d(3l-2-1)+3\} \\ &= \frac{1}{2}k\{3+d(3k-3)+3\} \\ &= \frac{3}{2}dk^2-\frac{3}{2}dk+3k \end{aligned}$$

である。

〔3〕

初項 a 、公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は、 n を自然数として、

$$a_n=d(n-1)+a$$

で表せる。 $D_1=0$ より、 a は奇数である。また、 $D_2\neq0$ より、 $a_2=d+a$ は偶数である。したがって、 a, d はともに奇数である。よって、

$$\begin{aligned} D_{2k} &= \sum_{l=1}^ka_{2l} \\ &= \sum_{l=1}^k\{d(2l-1)+a\} \\ &= \frac{1}{2}k\{d+a+d(2k-1)+a\} \\ &= dk^2+ak \end{aligned}$$

である。また、 $T_1=T_2=0, T_3\neq0$ より、 $a, a+d$ は 3 の倍数でなく、 $a_3=a+2d$ は 3 の倍数である。 $a_n=a-d+nd$ より、

$$\begin{aligned} a_n &= (n-1)d+a \\ &= \{(a+2d)-(a+d)\}n+(a+2d)-3d \end{aligned}$$

となり、 a_n が 3 の倍数となる条件は n が 3 の倍数となることである。よって、

$$\begin{aligned} T_{3k} &= \sum_{l=1}^ka_{3l} \\ &= \sum_{l=1}^k\{d(3l-1)+a\} \\ &= \frac{1}{2}k\{2d+a+d(3k-1)+a\} \\ &= \frac{3}{2}dk^2+\frac{1}{2}dk+ak \end{aligned}$$

である。このとき、 $6D_{2k}=5T_{3k}$ より、

$$\begin{aligned} 6D_{2k} &= 5T_{3k} \\ \Leftrightarrow 6(dk^2+ak) &= 5\left(\frac{3}{2}dk^2+\frac{1}{2}dk+ak\right) \\ \Leftrightarrow 3dk^2-(2a-5d)k &= 0 \end{aligned}$$

である。 $k\neq0$ より、 $a=\frac{3k+5}{2}d$ となる。よって、 $\frac{a}{d}=\frac{3k+5}{2}$ である。

III

【解答】

〔1〕	ア	イ		
	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$		
〔2〕	ウ	エ		
	$\frac{\pi}{4}$	0		
〔3〕	オ	カ		
	$\frac{n}{2}+1$	$\frac{\pi}{n}$		
〔4〕	キ	ク	ケ	コ
	$\frac{\pi}{2n}$	$\frac{3\pi}{2n}$	$2n$	$\cos\frac{\pi}{n}$

【解説】

〔1〕

条件より、 $z_1=1$ である。円一周の角度は 2π なので、 $n=3$ より、

$$\begin{aligned}\arg z_2 &= \frac{2}{3}\pi \\ \arg z_3 &= \frac{4}{3}\pi\end{aligned}$$

と表せるので、 z_3' は z_3 の虚軸に関して対称の点のため、 $\arg z_3' = \frac{5}{3}\pi$ である。

〔2〕

$\arg z_1 = \theta$ とおくと、

$$\begin{aligned}\arg z_2 &= \theta + \frac{1}{2}\pi \\ \arg z_3 &= \theta + \pi\end{aligned}$$

と表せるので、 $z_1 = z_2'$ となるのは、 z_1 と z_2 が虚軸対称であるときである。このとき、

$$\begin{aligned}\theta + \left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) &= \pi \\ \Leftrightarrow \theta &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

となる。よって、 $\arg z_1 = \frac{\pi}{4}$ である。また、 $z_1 = z_3'$ となるのは、 z_1 と z_3 が虚軸対称であるとき

である。このとき、

$$\begin{aligned}\theta + (\theta + \pi) &= \pi \\ \Leftrightarrow \theta &= 0\end{aligned}$$

となる。よって、 $\arg z_1 = 0$ である。

〔3〕

一般的に、

$$\arg z_k = \theta + \frac{2(k-1)}{n}\pi \text{ (ただし、} k=1, 2, \dots, n \text{)}$$

とおける。 $z_k' = z_1$ となるとき、 z_1 と z_k が虚軸対称であるので、

$$\begin{aligned}\theta + \left\{\theta + \frac{2(k-1)}{n}\pi\right\} &= \pi \\ \Leftrightarrow \theta &= \frac{n-2(k-1)}{2n}\pi\end{aligned}$$

となる。 $z_1=1$ のとき、 $\theta=0$ なので、

$$\begin{aligned}n-2(k-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow k &= \frac{n}{2}+1\end{aligned}$$

である。 n が偶数のとき、 $k = \frac{n}{2}+1$ は整数である。また、 $z_1 \neq 1$ のとき、 $0 < \theta < \frac{2}{n}\pi$ であるの

で、 $n \neq 0$ より、

$$\begin{aligned}0 < \frac{n-2(k-1)}{2n}\pi < \frac{2}{n}\pi \\ \Leftrightarrow 0 < n-2(k-1)\pi < 4\pi \\ \Leftrightarrow \frac{n}{2}-1 < k < \frac{n}{2}+1\end{aligned}$$

である。 n が偶数のとき k は自然数より、 $k = \frac{n}{2}$ である。よって、

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{n-2(k-1)}{2n}\pi \\ \Leftrightarrow \theta &= \frac{n-2\left(\frac{n}{2}-1\right)}{2n}\pi \\ \therefore \theta &= \frac{\pi}{n}\end{aligned}$$

である。

〔4〕

〔3〕より、 $\theta = \frac{n-2(k-1)}{2n}\pi$ で表される。 $0 \leq \theta < \frac{2}{n}\pi$ であるので、

$$\begin{aligned}0 \leq \frac{n-2(k-1)}{2n}\pi < \frac{2}{n}\pi \\ \Leftrightarrow \frac{n}{2}-1 < k \leq \frac{n}{2}+1 \\ \Leftrightarrow \frac{n-1}{2}-\frac{1}{2} < k \leq \frac{n+1}{2}+\frac{1}{2}\end{aligned}$$

である。 n は奇数より、 $\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}$ は整数である。 k は自然数より、 $k = \frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}$ である。

このとき、

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{n-2(k-1)}{2n}\pi \\ \Leftrightarrow \theta &= \frac{n-2\left\{\left(\frac{n-1}{2}\right)-1\right\}}{2n}\pi, \frac{n-2\left\{\left(\frac{n+1}{2}\right)-1\right\}}{2n}\pi \\ \therefore \theta &= \frac{3\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\end{aligned}$$

である。 $z_1=1$ のとき、 P と P' の共通部分は、正 $2n$ 角形の周および内部である。また、この円は線分 z_1z_2 に接する内接円であるため、点 O を中心とする半径は、

$$z_1 \cdot \cos\frac{\pi}{n} = \cos\frac{\pi}{n}$$

である。

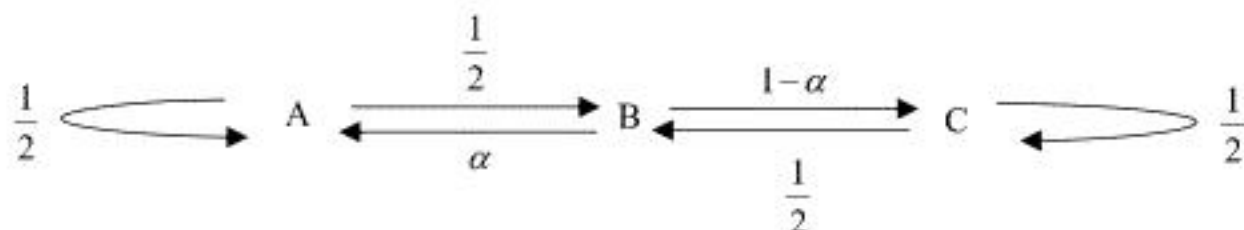
IV

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}(1-\alpha)$
カ	キ	ク		
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$		
ケ	コ	サ		
$\frac{2\alpha}{3}$	$(1-\alpha)$	$\frac{\alpha}{3}$		

〔解説〕

状態遷移図は以下のようになる。



以上より,

$$P(A_n) = P(A_{n-1}) \cdot \frac{1}{2} + P(B_{n-1}) \cdot \alpha$$

$$P(B_n) = P(A_{n-1}) \cdot \frac{1}{2} + P(C_{n-1}) \cdot \frac{1}{2}$$

$$P(C_n) = P(B_{n-1}) \cdot (1-\alpha) + P(C_{n-1}) \cdot \frac{1}{2}$$

が成り立つので, $P(A_0)=1, P(B_0)=0, P(C_0)=0$ より,

$$P(A_1) = \frac{1}{2}, P(B_1) = \frac{1}{2}, P(C_1) = 0$$

である。また,

$$P(A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \alpha = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}$$

$$P(B_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(C_2) = \frac{1}{2} \cdot (1-\alpha)$$

である。1以上の n について, $P(A_n)+P(B_n)+P(C_n)=1$ より,

$$P(B_n) = \frac{1}{2} \{P(A_{n-1}) + P(C_{n-1})\}$$

$$\Leftrightarrow P(B_n) = \frac{1}{2} \{1 - P(B_{n-1})\}$$

$$\therefore P(B_n) = -\frac{1}{2} \cdot P(B_{n-1}) + \frac{1}{2}$$

となる。よって,

$$P(B_n) - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} \left\{ P(B_{n-1}) - \frac{1}{3} \right\}$$

$$\Leftrightarrow P(B_n) = \left\{ P(B_0) - \frac{1}{3} \right\} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)^n + \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow P(B_n) = -\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)^n + \frac{1}{3}$$

となる。したがって,

$$P(A_n) = P(A_{n-1}) \cdot \frac{1}{2} + P(B_{n-1}) \cdot \alpha$$

$$\Leftrightarrow P(A_n) = \frac{1}{2} \cdot P(A_{n-1}) + \alpha \cdot \left\{ -\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)^n + \frac{1}{3} \right\}$$

$$\Leftrightarrow 2^{n+1} P(A_{n+1}) = 2^n P(A_n) + \frac{\alpha}{3} \{ 2^{n+1} - 2 \cdot (-1)^n \}$$

数列 $\{2^n P(A_n)\}$ は階差数列であるから, $n \geq 1$ のとき,

$$\begin{aligned} 2^n P(A_n) &= 2^0 \cdot P(A_0) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha}{3} \{ 2^{k+1} - 2 \cdot (-1)^k \} \\ &= 1 + \frac{\alpha}{3} \left\{ 2^{n+1} - 2 - 2 \cdot \frac{1 - (-1)^n}{1 - (-1)} \right\} \\ &= 1 + \frac{\alpha}{3} \{ 2^{n+1} + (-1)^n - 3 \} \\ &= 1 - \alpha + \frac{\alpha}{3} \{ 2^{n+1} + (-1)^n \} \end{aligned}$$

となる。 $P(A_0)=1$ であるので, これは $n=0$ のときにも成立する。よって,

$$P(A_n) = \frac{2\alpha}{3} + (1-\alpha) \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^n + \frac{\alpha}{3} \left(-\frac{1}{2} \right)^n \quad (n \geq 0) \text{ である。}$$