

I

【解答】

〔1〕	ア	イ		
	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$		
〔2〕	ウ	エ	オ	
	$-\frac{7}{13}$	$2\sqrt{30}$	$\frac{8\sqrt{30}}{3}$	
〔3〕	カ	キ	ク	ケ
	2	0	$9-4\sqrt{5}$	$9+4\sqrt{5}$

【解説】

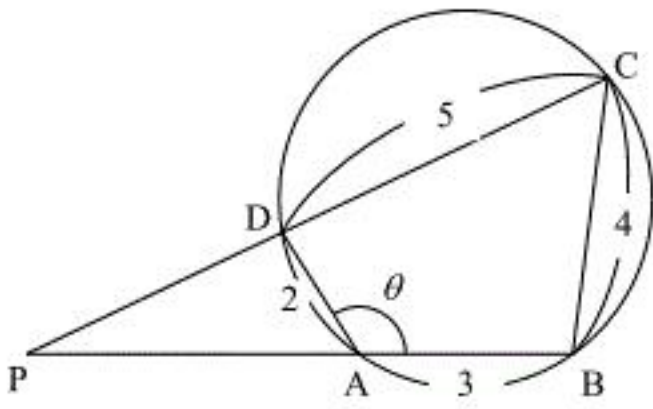
〔1〕

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき、 $\sin x > 0, \cos x > 0$ より、真数条件を満たす。 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき、 $0 < 2x < \pi$ であることに注意すると、

$$\begin{aligned} \log_3 \sin x + \log_3 \cos x + 2 \log_3 2 - \frac{1}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \log_3 \left(\sin x \cdot \cos x \cdot 2^2 \cdot 3^{-\frac{1}{2}} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{3}} \sin x \cos x &= 1 \\ \Leftrightarrow \sin 2x &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Leftrightarrow 2x &= \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

である。

〔2〕 (a)



$\angle DAB = \theta$ ($0 < \theta < \pi$) とおく。四角形 ABCD は円に内接するから、 $\angle BCD = \pi - \theta$ である。よって、余弦定理より、

$$\begin{aligned} BD^2 &= AD^2 + AB^2 - 2 \cdot AD \cdot AB \cdot \cos \theta \\ &= 13 - 12 \cos \theta \\ BD^2 &= CD^2 + CB^2 - 2 \cdot CD \cdot CB \cdot \cos(\pi - \theta) \\ &= 41 + 40 \cos \theta \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、

$$\begin{aligned} 13 - 12 \cos \theta &= 41 + 40 \cos \theta \\ \therefore \cos \theta &= -\frac{7}{13} \end{aligned}$$

となるから、 $\cos \angle DAB = -\frac{7}{13}$ である。

(b)

四角形 ABCD の面積は $\triangle DAB$ の面積と $\triangle BCD$ の面積の和である。ここで、 $0 < \theta < \pi$ であるから、 $\sin \theta > 0$ である。よって、

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{2\sqrt{30}}{13}$$

である。したがって、求める面積は

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin \theta + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \sin(\pi - \theta) = 13 \sin \theta = 13 \cdot \frac{2\sqrt{30}}{13} = 2\sqrt{30}$$

である。

(c)

$\angle PAD = \pi - \theta$ であるから、二角相等により、 $\triangle PDA \sim \triangle PBC$ であり、相似比は

$DA : BC = 1 : 2$ である。よって、 $\triangle PBC$ の面積を S とすると、 $\triangle PDA$ の面積は $\frac{1}{4}S$ である。し

たがって、求める面積 S は、

$$\begin{aligned} S - \frac{1}{4}S &= 2\sqrt{30} \\ \therefore S &= \frac{8\sqrt{30}}{3} \end{aligned}$$

である。

〔3〕 (a)

$$\begin{aligned} x^3 + (a-5)x^2 + (a+8)x - 6a - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-2)\{x^2 + (a-3)x + (3a+2)\} &= 0 \quad \cdots \text{①} \end{aligned}$$

であるから、この方程式はどのような a の値についても $x=2$ を解にもつ。

(b)

(a)より、方程式①が異なる2つの実数解をもつとき、 x についての2次方程式

$$x^2 + (a-3)x + (3a+2) = 0 \quad \cdots \text{②}$$

が

- [1] $x=2$ と $x=2$ 以外の解をもつ
- [2] $x=2$ 以外の重解をもつ

のいずれかを満たす。これに注意して、場合分けをする。

[1] ②が $x=2$ と $x=2$ 以外の解をもつとき

$x=2$ が②の解となる条件は、

$$\begin{aligned} 4 + 2(a-3) + (3a+2) &= 0 \\ \therefore a &= 0 \end{aligned}$$

である。このとき、②は

$$\begin{aligned} x^2 - 3x + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(x-2) &= 0 \\ \therefore x &= 1, 2 \end{aligned}$$

となるから、 $x=2$ と $x=2$ 以外の解をもつ。

[2] ②が $x=2$ 以外の重解をもつとき

②の判別式を D とおくと、 a は

$$\begin{aligned} D &= 0 \\ \Leftrightarrow (a-3)^2 - 4(3a+2) &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - 18a + 1 &= 0 \\ \therefore a &= 9 \pm 4\sqrt{5} \end{aligned}$$

を満たす。ここで、[1]より、②が $x=2$ を解にもつとき $a=0$ であるから、 $a=9 \pm 4\sqrt{5}$ のとき、②は $x=2$ 以外の重解をもつ。

以上[1], [2]より、求める a の値は $a=0, 9-4\sqrt{5}, 9+4\sqrt{5}$ である。また、 $81 > 80 \Leftrightarrow 9 > 4\sqrt{5}$ であるから、 $0 < 9-4\sqrt{5} < 9+4\sqrt{5}$ である。

II

〔解答〕

〔1〕	$\boxed{\text{ア}}$	$\boxed{\text{イ}}$		
	$\sqrt{(x-x_1)^2+y_1^2}$	$\sqrt{(x-x_2)^2+y_2^2}$		
〔2〕	$\boxed{\text{ウ}}$	$\boxed{\text{エ}}$	$\boxed{\text{オ}}$	$\boxed{\text{カ}}$
	$2(n_1+n_2)$	$2(n_1x_1+n_2x_2)$	$\frac{n_1x_1+n_2x_2}{n_1+n_2}$	n_2
	$\boxed{\text{キ}}$	$\boxed{\text{ク}}$	$\boxed{\text{ケ}}$	$\boxed{\text{コ}}$
	n_1	$\frac{n_1n_2}{n_1+n_2}$	n_1	n_2
〔3〕	$\boxed{\text{サ}}$	$\boxed{\text{シ}}$	$\boxed{\text{ス}}$	$\boxed{\text{セ}}$
	n_2	n_2^2	n_1	n_1^2

〔解説〕

〔1〕

$$AP = \sqrt{(x-x_1)^2 + (0-y_1)^2} = \sqrt{(x-x_1)^2 + y_1^2}$$

$$BP = \sqrt{(x-x_2)^2 + (0-y_2)^2} = \sqrt{(x-x_2)^2 + y_2^2}$$

である。

〔2〕

〔1〕より、

$$f(x) = n_1 AP^2 + n_2 BP^2 = n_1 \{(x-x_1)^2 + y_1^2\} + n_2 \{(x-x_2)^2 + y_2^2\}$$

であるから、

$$f'(x) = 2n_1(x-x_1) + 2n_2(x-x_2) = 2(n_1+n_2)x - 2(n_1x_1+n_2x_2)$$

である。 $n_1, n_2 > 0$ であるから、 $f(x)$ の増減は以下ようになる。

x	...	$\frac{n_1x_1+n_2x_2}{n_1+n_2}$	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$

以上より、 $f(x)$ が最小値をとるとき、 $x = \frac{n_1x_1+n_2x_2}{n_1+n_2}$ である。このときの点 P の x 座標は線分

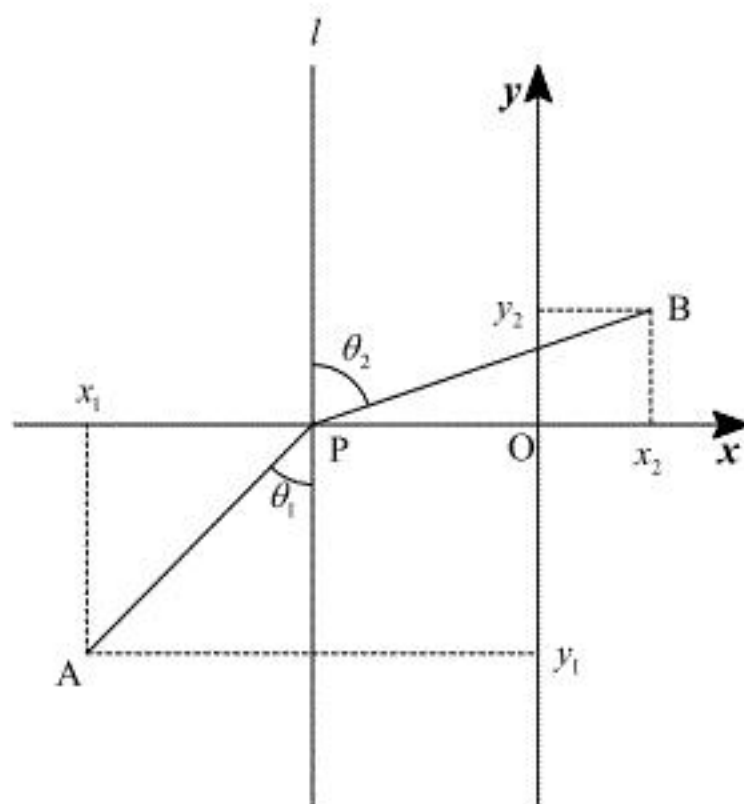
AB を $n_2:n_1$ に内分する点の x 座標と同じである。また、 $f(x)$ の最小値は

$$\begin{aligned} f\left(\frac{n_1x_1+n_2x_2}{n_1+n_2}\right) &= n_1 \left\{ \left(\frac{n_1x_1+n_2x_2}{n_1+n_2} - x_1 \right)^2 + y_1^2 \right\} + n_2 \left\{ \left(\frac{n_1x_1+n_2x_2}{n_1+n_2} - x_2 \right)^2 + y_2^2 \right\} \\ &= n_1 \left[\left\{ \frac{n_2(x_2-x_1)}{n_1+n_2} \right\}^2 + y_1^2 \right] + n_2 \left[\left\{ \frac{n_1(x_1-x_2)}{n_1+n_2} \right\}^2 + y_2^2 \right] \\ &= \frac{n_1n_2}{n_1+n_2} (x_2-x_1)^2 + n_1y_1^2 + n_2y_2^2 \end{aligned}$$

である。

〔3〕

θ_1, θ_2 の図は以下ようになる。



ここで、 $f(x)$ が最小値をとるとき、

$$\begin{aligned} AP &= \sqrt{\left(\frac{n_1x_1+n_2x_2}{n_1+n_2} - x_1 \right)^2 + y_1^2} = \sqrt{\left\{ \frac{n_2(x_2-x_1)}{n_1+n_2} \right\}^2 + y_1^2} \\ BP &= \sqrt{\left(\frac{n_1x_1+n_2x_2}{n_1+n_2} - x_2 \right)^2 + y_2^2} = \sqrt{\left\{ \frac{n_1(x_1-x_2)}{n_1+n_2} \right\}^2 + y_2^2} \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} \sin \theta_1 &= \frac{x-x_1}{AP} \\ &= \frac{\frac{n_1x_1+n_2x_2}{n_1+n_2} - x_1}{\sqrt{\left\{ \frac{n_2(x_2-x_1)}{n_1+n_2} \right\}^2 + y_1^2}} \\ &= \frac{n_2(x_2-x_1)}{\sqrt{n_2^2(x_2-x_1)^2 + (n_1+n_2)^2 y_1^2}} \end{aligned}$$

である。同様にして、

$$\sin \theta_2 = \frac{x_2-x}{BP} = \frac{n_1(x_1-x_2)}{\sqrt{n_1^2(x_2-x_1)^2 + (n_1+n_2)^2 y_2^2}}$$

である。

Ⅲ

〔解答〕

〔1〕	ア	イ	ウ	エ	オ	カ
	0	1	$3s$	0	$1+4t$	1
〔2〕	キ	ク	ケ	コ	サ	シ
	1	$\frac{1}{2}$	1	0	0	1
〔3〕	ス	セ				
	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{2\sqrt{6}}{27}$				

〔解説〕

〔1〕

$$\overrightarrow{OP} = s\vec{a} = (s, 3s, 0)$$

$$\overrightarrow{OQ} = (2, 1, 1) + t\vec{b} = (2-2t, 1+4t, 1)$$

である。よって、 l_1 は $z=0$ に含まれ、 l_2 は $z=1$ に含まれる。

〔2〕

〔1〕より、

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (2-s-2t, 1-3s+4t, 1)$$

である。 $\overrightarrow{PQ}$ の z 成分は1であるから、 $|\overrightarrow{PQ}| \geq 1$ である。ここで、 $|\overrightarrow{PQ}|=1$ となるのは

$$\begin{cases} 2-s-2t=0 \\ 1-3s+4t=0 \end{cases}$$

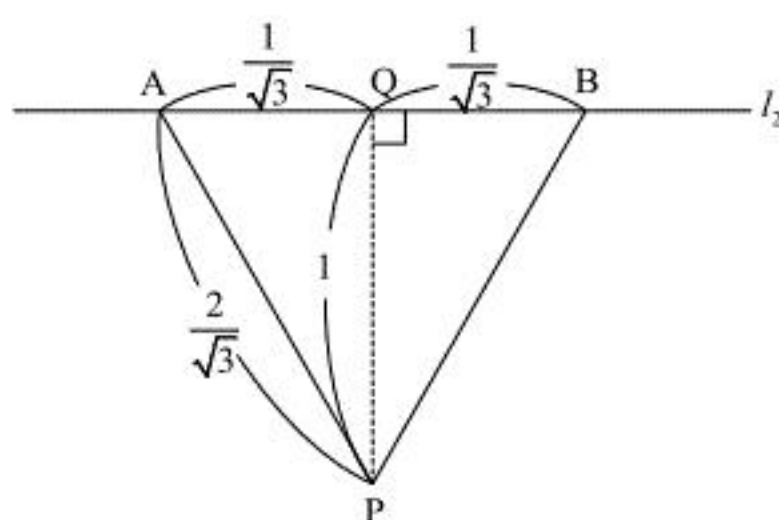
$$\therefore (s, t) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$$

となるときであるから、 $|\overrightarrow{PQ}|$ は $s=1, t=\frac{1}{2}$ のときに最小値1をとる。このとき $\overrightarrow{PQ}=(0, 0, 1)$ で

あるから、直線 PQ は直線 l_1 を含む $z=0$ と直線 l_2 を含む $z=1$ にそれぞれ直交している。

〔3〕

$|\overrightarrow{PQ}|$ が最小になるとき、 $PQ \perp l_2$ であるから、 $\triangle PAB$ は以下の図のようになる。

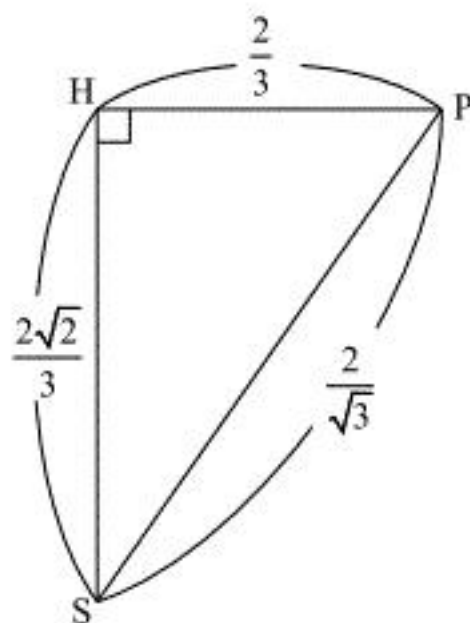


よって、 $\triangle PAB$ が正三角形であることから、 $\triangle PAB$ の1辺の長さは $\frac{OP}{\sin \frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ で、面積は

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

である。また、正四面体 $SPAB$ について点 S から $\triangle PAB$ に下ろした垂線の足を H とすると、正四面体の対称性より、点 H は $\triangle PAB$ の重心であるから、線分 PQ を2:1に内分する。よって、

$PH = \frac{2}{3}$ である。したがって、 $\triangle SPH$ の図は以下のようになる。



上図より、

$$SH = \sqrt{PS^2 - PH^2} = \sqrt{\frac{4}{3} - \frac{4}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

であるから、正四面体 $SPAB$ の体積は、

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{27}$$

となる。

〔解答〕

〔1〕	ア	イ	ウ
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{32}$
	エ	オ	カ
	$\frac{21}{32}$	$-\frac{1}{8}P(3n)+\frac{3}{8}$	$\frac{1}{3}-\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}$
〔2〕	キ	ク	
	$2p^2-2p+1$	$8p^4-16p^3+12p^2-4p+1$	

〔解説〕

〔1〕 (a)

以下、さいころを投げたときに偶数の目が出た回数を l 回とし、奇数の目が出た回数を m 回とする。ここで、偶数の目が出る確率と奇数の目が出る確率はともに $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ である。よって、2 回続けて 1 個のさいころを投げた後に、2 文字の並びが TT であるのは $(l, m)=(1, 1)$ となるときであるから、求める確率は、

$${}_2C_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

となる。

(b)

3 回続けて 1 個のさいころを投げた後に、2 文字の並びが AA であるのは $(l, m)=(3, 0), (0, 3)$ となるときであるから、求める確率は、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}$$

となる。

(c)

6 回続けて 1 個のさいころを投げた後に、2 文字の並びが AA であるのは $(l, m)=(6, 0), (3, 3), (0, 6)$ となるときであるから、その確率は、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^6 + {}_6C_3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{11}{32}$$

となる。また、左の文字が T または G のときは、 l を 3 で割った余りがそれぞれ 1 または 2 であるから、 m を 3 で割った余りはそれぞれ 2 または 1 となり、右の文字はそれぞれ G または T となる。よって、2 文字の並びが A を含んでいない確率は、

$$1 - \frac{11}{32} = \frac{21}{32}$$

となる。

(d)

(c) より、 $3n$ 回続けて 1 個のさいころを投げた後の 2 文字の並びは AA, TG, GT のいずれかであり、これらで場合分けを行う。

〔1〕 $3n$ 回続けて 1 個のさいころを投げた後の 2 文字の並びが AA のとき

さらに 3 回続けて 1 個のさいころを投げた後の 2 文字の並びが AA となるのは、偶数の目が 3 回出たか、奇数の目が 3 回出たときであるから、その確率は、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}$$

である。

〔2〕 $3n$ 回続けて 1 個のさいころを投げた後の 2 文字の並びが TG のとき

さらに 3 回続けて 1 個のさいころを投げた後の 2 文字の並びが AA となるのは、偶数の目が 2 回出て、奇数の目が 1 回出たときであるから、その確率は、

$${}_3C_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

である。

〔3〕 $3n$ 回続けて 1 個のさいころを投げた後の 2 文字の並びが GT のとき

さらに 3 回続けて 1 個のさいころを投げた後の 2 文字の並びが AA となるのは、偶数の目が 1 回出て、奇数の目が 2 回出たときであるから、その確率は、

$${}_3C_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

である。

以上〔1〕,〔2〕,〔3〕より、

$$P(3(n+1)) = \frac{1}{4}P(3n) + \frac{3}{8}\{1 - P(3n)\} = -\frac{1}{8}P(3n) + \frac{3}{8}$$

と表せる。

(e)

(d) より、

$$\begin{aligned} P(3(n+1)) &= -\frac{1}{8}P(3n) + \frac{3}{8} \\ \Leftrightarrow P(3(n+1)) - \frac{1}{3} &= -\frac{1}{8}\left\{P(3n) - \frac{1}{3}\right\} \end{aligned}$$

となるから、数列 $\left\{P(3n) - \frac{1}{3}\right\}$ は初項 $P(3) - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}$ 、公比 $-\frac{1}{8}$ の等比数列である。よって、

$$\begin{aligned} P(3n) - \frac{1}{3} &= -\frac{1}{12} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{n-1} \\ \therefore P(3n) &= \frac{1}{3} - \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

となる。

〔2〕 (a)

l, m を〔1〕で定めた数とする。2 回続けて 1 個のさいころを投げた後の 2 文字の並びが AA であるのは、 $(l, m)=(2, 0), (0, 2)$ となるときである。よって、求める確率は、

$$p^2 + (1-p)^2 = 2p^2 - 2p + 1$$

である。

(b)

4 回続けて 1 個のさいころを投げた後の 2 文字の並びが AA であるのは、 $(l, m)=(4, 0), (2, 2), (0, 4)$ となるときである。よって、求める確率は、

$$p^4 + {}_4C_2 \cdot p^2(1-p)^2 + (1-p)^4 = 8p^4 - 16p^3 + 12p^2 - 4p + 1$$

である。