

(第3時限：100分)

2019年度 ②

数 学 問 題

(理 系)

(全6ページ)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 問題文の にあてはまる適当なものを、解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
3. 解答用紙1枚・下書用紙2枚は、この冊子の中に折り込んであります。
4. 試験終了後、問題冊子・下書用紙は持ち帰りなさい。

数 学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの設問について問題文の にあてはまる適当なものを、
解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

Ⅰ 以下，極形式の偏角はすべて 0 以上 2π 未満である。

- 〔1〕 2 次方程式 $z^2 + 2z + 2 = 0$ の 2 つの解のうち，虚部が正であるものを z_1 ，
負であるものを z_2 とおく。それぞれを極形式で表すと，

$$z_1 = \boxed{\text{ア}}, \quad z_2 = \boxed{\text{イ}}$$

となる。

- 〔2〕 w を複素数とする。 w が $w^2 = z_1$ を満たすとき， w を極形式で表すと

$$w = \boxed{\text{ウ}}, \quad \boxed{\text{エ}}$$

となる。また， $w^2 = z_2$ を満たすとき， w を極形式で表すと

$$w = \boxed{\text{オ}}, \quad \boxed{\text{カ}}$$

となる。これら 4 つの複素数を，偏角が小さい順に w_1, w_2, w_3, w_4 とする。

各 w_k ($k = 1, 2, 3, 4$) は， w の 4 次方程式 $\boxed{\text{キ}} = 0$ の解となる。こ

こで， $\boxed{\text{キ}}$ は w^4 の係数が 1 である w について整理された多項式である。

また， $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = \boxed{\text{ク}}$ ， $w_1 w_2 w_3 w_4 = \boxed{\text{ケ}}$ ，

$w_1^2 + w_2^2 = \boxed{\text{コ}}$ である。

- 〔3〕 複素数平面上の 3 点 $0, z_1, w_1$ を頂点とする三角形の面積を S_1 ，3 点 $0, z_2, w_2$ を頂点とする三角形の面積を S_2 とおくと，

$$S_1^2 = \boxed{\text{サ}}, \quad \frac{S_1}{S_2} = \boxed{\text{シ}}$$

である。

II

〔1〕 a_1 を 0 以上 63 以下の整数として、 $2a_1$ を 64 で割った余りを a_2 とする。以下同様に、 $n = 2, 3, \dots$ に対して、 $2a_n$ を 64 で割った余りを a_{n+1} とすることで、数列 $\{a_n\}$ を定める。

$a_1 = 43$ とする。 a_1 を 2 進法で表すと $\boxed{\text{ア}}_{(2)}$ となる。このとき、 a_2 を 2 進法で表すと $\boxed{\text{イ}}_{(2)}$ であり、10 進法で表すと $\boxed{\text{ウ}}$ となる。以降の項を 10 進法で表すと $a_3 = \boxed{\text{エ}}$ 、 $a_4 = \boxed{\text{オ}}$ 、 $a_8 = \boxed{\text{カ}}$ である。

$n \geq \boxed{\text{キ}}$ のとき、 a_1 の値によらず $a_n = 0$ である。 $n \geq 6$ のとき $a_n = 0$ を満たす a_1 は $\boxed{\text{ク}}$ 個ある。

〔2〕 b_1 を 0 以上 127 以下の整数として、 $4b_1$ を 128 で割った余りを b_2 とする。以下同様に、 $n = 2, 3, \dots$ に対して、 $4b_n$ を 128 で割った余りを b_{n+1} とすることで、数列 $\{b_n\}$ を定める。

$n \geq \boxed{\text{ケ}}$ のとき、 b_1 の値によらず $b_n = 0$ である。 $n \geq 2$ のとき $b_n = 0$ を満たす b_1 は $\boxed{\text{コ}}$ 個ある。

〔3〕 c_1 を 0 以上 80 以下の整数として、 $3c_1 + 1$ を 81 で割った余りを c_2 とする。以下同様に、 $n = 2, 3, \dots$ に対して、 $3c_n + 1$ を 81 で割った余りを c_{n+1} とすることで、数列 $\{c_n\}$ を定める。

$n \geq \boxed{\text{サ}}$ のとき、 c_1 の値によらず $c_n = \boxed{\text{シ}}$ である。

(注： $\boxed{\text{キ}}$ ， $\boxed{\text{ケ}}$ ， $\boxed{\text{サ}}$ は条件を満たす最小の自然数で答えよ。)

Ⅲ 閉区間 $[0, \pi]$ 上で定義された連続関数 $f(t)$ があり、区間 $(0, \pi]$ 上では

$f(t) = \frac{t \sin t}{1 - \cos t}$ で与えられている。定積分 $\int_0^\pi f(t) dt$ の値を求めたい。

[1] $f(0) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t) = \boxed{\text{ア}}$ である。

[2] $0 < a \leq \pi$ として、定積分 $I(a) = \int_a^\pi f(t) dt$ を考える。 $\log(1 - \cos t)$

の導関数が $\boxed{\text{イ}}$ であるので、部分積分法を用いると、

$$I(a) = \boxed{\text{ウ}} - a \log(1 - \cos a) - \int_a^\pi \log(1 - \cos t) dt \quad (1)$$

となる。三角関数の半角の公式を用い、 $t = 2x$ において置換積分法を用いると、

$$\int_a^\pi \log(1 - \cos t) dt = \boxed{\text{エ}} + 4 \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x) dx \quad (2)$$

となる。

極限 $\lim_{a \rightarrow +0} I(a)$ が存在すること、および $\lim_{a \rightarrow +0} a \log(1 - \cos a) = 0$ であるこ

とを用いると、関係式 (1), (2) より、極限 $\lim_{a \rightarrow +0} \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x) dx$ が存在す

ることがわかる。そこで $\lim_{a \rightarrow +0} \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x) dx = J$ において J を求める。

[3] $0 < b < \frac{\pi}{2}$ に対し,

$$K(b) = \int_b^{\frac{\pi}{2}-b} \log(\sin x) dx, \quad L(b) = \int_b^{\frac{\pi}{2}-b} \log(\cos x) dx$$

とする。まず, $y = \frac{\pi}{2} - x$ において置換積分法を用いると,

$$K(b) - L(b) = \boxed{\text{オ}}$$

がわかる。一方, 和については, 三角関数の倍角の公式を用い, $2x = t$ とおくと,

$$K(b) + L(b) = \int_{2b}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin t) dt + \boxed{\text{カ}}$$

となる。

これらより, $\lim_{b \rightarrow +0} K(b) = \boxed{\text{キ}}$ となる。

[4] $J = \lim_{b \rightarrow +0} K(b)$ と関係式 (1), (2) より,

$$\int_0^{\pi} f(t) dt = \lim_{a \rightarrow +0} I(a) = \boxed{\text{ク}}$$

が得られる。

Ⅳ 4つのチーム A, B, C, D が参加し優勝を決める大会がある。大会のルールは、2つのチームが対戦し、必ず勝敗は決まり、引き分けはないとしている。A, B, C, D がそれぞれ対戦したときに、対戦相手に勝つ確率は次の①～④のとおりである。

① A が B に勝つ確率は $\frac{2}{3}$ である。

② A が C に勝つ確率は $\frac{1}{3}$ である。

③ A が D に勝つ確率は $\frac{1}{2}$ である。

④ B, C, D の 3 チームにおけるどの組合せも互いに勝つ確率は $\frac{1}{2}$ である。

〔1〕 春の大会では、A, B, C, D から選ぶすべての組合せについて1回ずつ試合を行い、最も勝ち数の多いチームを優勝とする。ただし、複数のチームの勝ち数が最大である場合は、勝ち数が最大のチームすべてが優勝とする。

すべての試合数は ア である。A が全勝する確率は イ である。A が C のみに負けるが、C が全勝しない確率は ウ である。春の大会で、A が優勝する確率は エ である。

〔2〕 秋の大会では、くじで2チームずつに分かれて1回戦を行い、1回戦の勝者同士で2回戦を行ってその勝者を優勝とする。

A が1回戦で B と対戦し、かつ2回戦で C と対戦する確率は オ である。秋の大会で、A が優勝する確率は カ である。

[3] AがA'チームと交代して、A', B, C, Dが大会に参加する。大会のルールは変わらず、A', B, C, Dがそれぞれ対戦したときに、対戦相手に勝つ確率は、A'については次の①'~③'のとおりであり、その他については④のままである。

①' A'がBに勝つ確率は p である。

②' A'がCに勝つ確率は q である。ただし $q < \frac{1}{2}$ である。

③' A'がDに勝つ確率は $\frac{1}{2}$ である。

春の大会でA'が優勝する確率が $\frac{49}{100}$ であり、秋の大会でA'が優勝する確率が $\frac{23}{75}$ であるならば、 $p = \boxed{\text{キ}}$ である。

