

(第3時限：100分)

2019年度 ③

数 学 問 題

(理 系)

(全4ページ)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 問題文の にあてはまる適当なものを、解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
3. 解答用紙1枚・下書用紙2枚は、この冊子の中に折り込んであります。
4. 試験終了後、問題冊子・下書用紙は持ち帰りなさい。

数 学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの設問について問題文の にあてはまる適当なものを、
解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

Ⅰ n を 3 以上の自然数、 a を正の実数とする。 $x \geq 0$ において定義された関数

$$f(x) = x^n, \quad g(x) = a^2 x^{n-2} \quad \text{に対して} \quad S = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \quad \text{とする。}$$

〔1〕 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ は n の値によらず $x =$ で共有点をもつ。

また、 $f(x)$ の第 2 次導関数 $f''(x)$ が関数 $g(x)$ に等しくなるのは、

$a =$ のときである。

〔2〕 $n = 3$ とし、 $0 < a < 1$ とする。このとき、 S を a を用いて表すと、

$S =$ である。また、 $0 \leq x \leq 1$ の範囲において、 $g(x) - f(x)$ は、

$x =$ のとき、最大値 をとる。

〔3〕 S を a 、 n を用いて表すと、 $0 < a < 1$ であるとき、 $S =$ 、 $a \geq 1$

であるとき、 $S =$ である。各 n に対して、 S を最小にする a を n を

用いて表すと、 $a =$ である。

II p を $3 < p \leq 4$ を満たす定数として, $f(x) = px(1-x)$ とおく。

[1] x に関する方程式 $x = f(x)$ の解は $x = \boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$
($\boxed{\text{ア}} < \boxed{\text{イ}}$) である。また, $f(\boxed{\text{イ}}) = \boxed{\text{ウ}}$ である。

[2] $g(x) = f(f(x))$ とおく。 x に関する方程式 $x = g(x)$ の解のうち,

$x = f(x)$ を満たさないものを $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ とする。 α, β は x に関する 2 次
方程式 $x^2 + \boxed{\text{エ}}x + \boxed{\text{オ}} = 0$ の解であり, $f'(\alpha)f'(\beta) = \boxed{\text{カ}}$ で
ある。さらに, 不等式 $|f'(\alpha)f'(\beta)| < 1$ を満たす p の範囲を求めると,
 $3 < p < \boxed{\text{キ}}$ となる。

また, $f(g(x)) = g(f(x))$ であることより, $f(\alpha), f(\beta)$ も $x = g(x)$ の
解となることから, $f(\alpha) = \beta, f(\beta) = \alpha$ が成り立つ。これより,
 $g'(\alpha) = g'(\beta) = \boxed{\text{ク}}$ を得る。

(注: すべて f, g, α, β を用いずに答えよ。)

Ⅲ xyz 座標空間に点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, -1, 1)$, $B(-3, 1, 3)$ および点 P を考える。

[1] P が直線 AB 上にあるとする。 P が線分 AB の中点であるとき、 P の座標は ア である。 P が yz 平面上にあるとき、 P の座標は イ である。直線 OP が直線 AB と直交するとき、 P の座標は ウ である。

[2] P が $AP = BP$ を満たすとする。このとき、 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} =$ エ である。また、 $P(x, y, z)$ とするとき、 z を x, y を用いて表すと、 $z =$ オ である。さらに、3点 O, A, P が同一直線上にあるとき、 P の座標は カ である。

[3] r を定数とし、 P は $AP + BP = r$ を満たしながら動くとする。 r のとり得る範囲は $r \geq$ キ である。

$r =$ キ のとき、 P は2点 ク, ケ を端点とする線分上にある。

$r >$ キ とする。 P が直線 AB 上にあるならば、 $\overrightarrow{AP} =$ コ $\overrightarrow{AB}$ または $\overrightarrow{AP} =$ サ $\overrightarrow{AB}$ が成り立つ。また、 P と直線 AB の距離の最大値を r を用いて表すと、シ となる。

Ⅳ A君とB君が箱を1つずつもっていて、それぞれの箱の中には1から4の数字が1つずつ書かれた4個の球が入っている。

〔1〕 A君は、箱から1個の球を取り出し、そこに書かれた数字を記録して、箱に球を戻す。この試行を n 回繰り返したとき、記録された数字の和を S_n とする。この試行を2回行ったとき、 S_2 が4以下になる確率は ア である。この試行を4回繰り返したとき、 S_4 が16になる確率は イ である。この試行を10回繰り返して S_2 が6以上であり、かつ S_{10} が15になる確率は $\frac{\text{ウ}}{2^{19}}$ である。

〔2〕 次に、A君とB君の2名で以下の試行（★）を行う：

（★） A君とB君が各自の箱からそれぞれ1個球を取り出し、そこに書かれた数字を比較する。2つの数字が異なる場合は、大きな数であった方がみが3点を得る。2つの数字が同じであった場合は、双方が1点を得る。取り出した球は元の箱に戻す。

この試行を1回行ったとき、A君が得点する確率は エ である。

少なくとも一方の得点の合計が10点以上になるまでこの試行を繰り返す。試行は最大で オ 回行われる。試行は最小で カ 回行われ、その確率は キ である。試行がちょうど5回で終わる確率は ク である。

（注：確率はすべて既約分数で答えよ。）

