

(第2時限：100分)

2019年度 ⑤

数 学 問 題

(理 系)

(全4ページ)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 問題文の にあてはまる適当なものを、解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
3. 解答用紙1枚・下書用紙2枚は、この冊子の中に折り込んであります。
4. 試験終了後、問題冊子・下書用紙は持ち帰りなさい。

数 学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの設問について問題文の にあてはまる適当なものを，
解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

Ⅰ $p > 0$ とし， xy 平面上の点 (p, q) から 3 次関数 $y = x^3 - x$ のグラフに接線を引く。

〔1〕 3 次関数 $y = x^3 - x$ 上の点 $(t, t^3 - t)$ における接線の方程式は
 $y =$ ア である。

〔2〕 ちょうど 2 本の接線が引けるとき， q を p で表すと， $q =$ イ または
 $q =$ ウ である。ただし， イ $<$ ウ とする。さらに，2 つの接
点の y 座標が等しくなるのは， $p =$ エ ， オ のときである。

〔3〕 イ $< q <$ ウ のとき，3 次関数 $y = x^3 - x$ の接線で点 (p, q)
を通るものはちょうど 3 本ある。2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ がこの 3 つの接
点を通るとき， $a =$ カ ， $b =$ キ ， $c =$ ク である。

II 数列 $\{a_n\}$ は等差数列で、各項 a_n は自然数とする。初項 a_1 から第 n 項 a_n まで
 の中で、2 の倍数である項全体の和を D_n 、3 の倍数である項全体の和を T_n とおく。
 ただし、条件を満たす項が存在しないときは、和は 0 と定める。

[1] $\{a_n\}$ の一般項を $a_n = n$ とする。各自然数 k について、 $D_{2k} = \boxed{\text{ア}}$,
 $T_{3k} = \boxed{\text{イ}}$ である。また、 $n = \boxed{\text{ウ}}$ のとき $D_n = 30$ を満たし、
 $n = \boxed{\text{エ}}$ のとき $T_n = 165$ を満たす。

[2] $\{a_n\}$ の初項を 3、公差を d とする。ただし、 $d > 0$ とする。すべての n
 について、 $D_n = 0$ となるのは、 d が $\boxed{\text{オ}}$ の倍数のときである。また、す
 べての n について、 $T_n < T_{n+1}$ が成立するのは、 d が $\boxed{\text{カ}}$ の倍数のときで
 ある。 d がどちらの条件も満たさないとき、各自然数 k について
 $D_{2k} = \boxed{\text{キ}}$, $T_{3k} = \boxed{\text{ク}}$ である。

[3] $\{a_n\}$ の初項を a 、公差を d とし、 $D_1 = T_1 = T_2 = 0$ かつ $D_2 \neq 0$,
 $T_3 \neq 0$ とする。このとき、各自然数 k について $D_{2k} = \boxed{\text{ケ}}$,
 $T_{3k} = \boxed{\text{コ}}$ である。さらに、ある自然数 k について $6D_{2k} = 5T_{3k}$ が成立し
 ているとき、 $\frac{a}{d} = \boxed{\text{サ}}$ である。

Ⅲ n を 3 以上の自然数とする。複素数平面上の点 0 を中心とする単位円を考える。

この単位円を n 等分する点 $z_1, z_2, \dots, z_n$ を

$$0 \leq \arg z_1 < \arg z_2 < \dots < \arg z_n < 2\pi$$

を満たすようにとる。 $k = 1, \dots, n$ に対して各 z_k と虚軸に関して対称な点を z'_k とする。 n 個の点 $z_1, z_2, \dots, z_n$ を頂点とする正 n 角形の周および内部を P 、点 $z'_1, z'_2, \dots, z'_n$ を頂点とする正 n 角形の周および内部を P' とする。以下、偏角はすべて 0 以上 2π 未満である。

[1] $n = 3$ かつ $z_1 = 1$ のとき、 $\arg z_2 =$, $\arg z'_3 =$ である。

[2] $n = 4$ とする。 $z_1 = z'_2$ を満たすならば、 $\arg z_1 =$ である。また、
 $z_1 = z'_3$ を満たすならば、 $\arg z_1 =$ である。

[3] n を偶数とする。 $z_1 = 1$ のとき、 P と P' は一致し、 $z'_k = z_1$ となる k を n を用いて表すと、 $k =$ となる。 $z_1 \neq 1$ のとき、 P と P' が一致するのは、 $\arg z_1 =$ のときである。

[4] n を奇数とする。 P と P' が一致するのは、 $\arg z_1 =$ または、
 $\arg z_1 =$ のときである。 $z_1 = 1$ のとき、 P と P' の共通部分は、正
 角形の周および内部であり、この周は点 0 を中心とする半径
の円を内接円にもつ。

IV Iさんが, A, B, Cの3地点から以下の確率で別の地点に移動するか, 同じ地点にとどまる試行を n 回繰り返す。ただし, n は0以上の整数とし, 最初はA地点にいるとする。

- A地点にいるとき, 1回の試行でA地点にとどまる確率は $\frac{1}{2}$, B地点に移動する確率は $\frac{1}{2}$ である。
- B地点にいるとき, 1回の試行でA地点に移動する確率は α , C地点に移動する確率は $1 - \alpha$ である。ただし, α は $0 < \alpha < 1$ を満たす定数とする。
- C地点にいるとき, 1回の試行でC地点にとどまる確率は $\frac{1}{2}$, B地点に移動する確率は $\frac{1}{2}$ である。

Iさんが n 回の試行後に A, B, Cの各地点にいる事象をそれぞれ A_n, B_n, C_n とし, それらの確率を $P(A_n), P(B_n), P(C_n)$ と表す。

$P(A_0) = 1, P(B_0) = P(C_0) = 0$ であることから,

$$\begin{aligned} P(A_1) &= \boxed{\text{ア}}, & P(B_1) &= \boxed{\text{イ}}, & P(C_1) &= 0, \\ P(A_2) &= \boxed{\text{ウ}}, & P(B_2) &= \boxed{\text{エ}}, & P(C_2) &= \boxed{\text{オ}} \end{aligned}$$

である。

1以上の n について $P(B_n) = \boxed{\text{カ}} \times P(B_{n-1}) + \boxed{\text{キ}}$ が成り立ち, したがって, $P(B_n) = \boxed{\text{ク}}$ を得る。これを用いて $P(A_n)$ の漸化式を導き, 一般項 $P(A_n)$ を求めると,

$$P(A_n) = \boxed{\text{ケ}} + \boxed{\text{コ}} \left(\frac{1}{2} \right)^n + \boxed{\text{サ}} \left(-\frac{1}{2} \right)^n$$

が得られる。

(注: $\boxed{\text{カ}}, \boxed{\text{キ}}, \boxed{\text{ケ}}, \boxed{\text{コ}}, \boxed{\text{サ}}$ は n を用いずに表せ。)

