

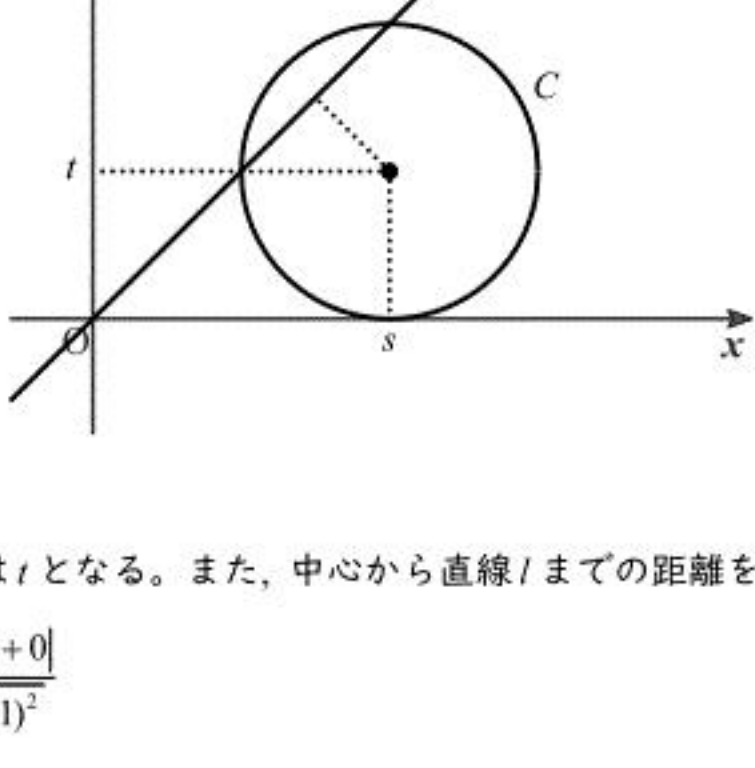
【解答】

ア	t	イ	$\frac{s-t}{\sqrt{2}}$	ウ	$\sqrt{2}-1$	エ	1
オ	$2-\sqrt{2}$	カ	$4+2\sqrt{2}$	キ	4		
ク	720	ケ	840	コ	240	サ	12
シ	4	ス	14	セ	-4	ソ	-30
タ	5	チ	6	ツ	$\frac{243}{4}$		

【解説】

[1] (a)

$s > t > 0$ より円 C ，直線 l を図示すると，下図のようになる。



よって，円 C の半径は t となる。また，中心から直線 l までの距離を d とおくと，その値は

$$\begin{aligned}d &= \frac{|1 \cdot s - 1 \cdot t + 0|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} \\&= \frac{|s - t|}{\sqrt{2}} \\&= \frac{s - t}{\sqrt{2}} \quad (\because s > t)\end{aligned}$$

となる。

(b)

円 C と直線 l が共有点を持つには，円 C の中心から直線 l までの距離 d より円 C の半径が大きくなれば良いから

$$\begin{aligned}0 < \frac{s - t}{\sqrt{2}} &\leq t \\ \Leftrightarrow 0 < s - t &\leq \sqrt{2}t \quad \cdots \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。ここで①の左辺と中辺について考えると

$$\begin{aligned}0 < s - t \\ \Leftrightarrow t < s \\ \Leftrightarrow \frac{t}{s} < 1 \quad (\because s > 0)\end{aligned}$$

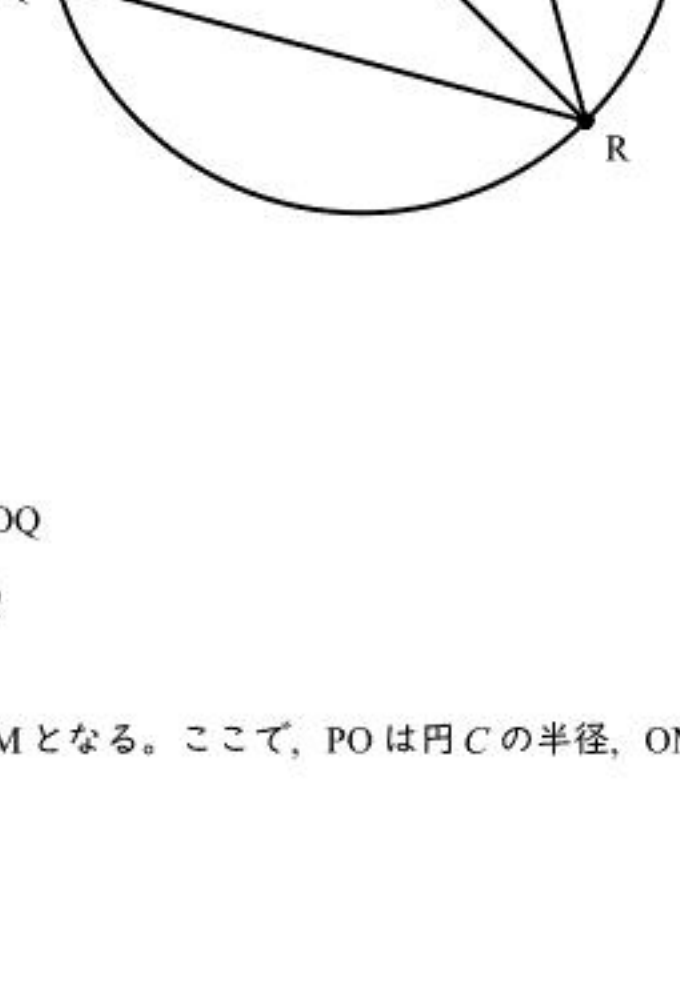
となる。同様に①の中辺と右辺について考えると

$$\begin{aligned}s - t &\leq \sqrt{2}t \\ \Leftrightarrow s &\leq (\sqrt{2} + 1)t \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2} + 1} &\leq \frac{t}{s} \quad (\because s > 0) \\ \Leftrightarrow \sqrt{2} - 1 &\leq \frac{t}{s}\end{aligned}$$

となる。よって，求める条件は $\sqrt{2} - 1 \leq \frac{t}{s} < 1$ となる。

(c)

円 C の中心を O とおく。点 O から直線 l におろした垂線の足を M とおく。円 C と，正三角形 PQR を図示すると，下図のようになる。



すると，

$$\begin{aligned}\angle POM &= \frac{1}{2} \angle POQ \\ &= \angle PRQ \\ &= 60^\circ\end{aligned}$$

となるから， $PO = 2OM$ となる。ここで， PO は円 C の半径， OM は円 C と直線 l の距離であるから

$$\begin{aligned}PO &= 2OM \\ \Leftrightarrow t &= 2 \cdot \frac{s - t}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow (\sqrt{2} + 1)t &= \sqrt{2}s \\ \Leftrightarrow \frac{t}{s} &= 2 - \sqrt{2} \quad (\because s \neq 0)\end{aligned}$$

となる。

(d)

(c)より， $t = (2 - \sqrt{2})s$ となる。ここで，正三角形の一边を求めると

$$\begin{aligned}PQ &= 2PM \\ &= 2\sqrt{3}OM \\ &= 2\sqrt{3} \cdot \frac{s - t}{\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{6} \{s - (2 - \sqrt{2})s\} \\ &= \sqrt{6}(\sqrt{2} - 1)s \quad \cdots \cdots \textcircled{2}\end{aligned}$$

となる。また， $\triangle PQR = 12\sqrt{3}$ より

$$\begin{aligned}\triangle PQR &= 12\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot PQ^2 \cdot \sin 60^\circ &= 12\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} PQ^2 &= 12\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow PQ^2 &= 48 \\ \Leftrightarrow PQ &= 4\sqrt{3} \quad (\because PQ > 0) \quad \cdots \cdots \textcircled{3}\end{aligned}$$

となる。よって，②，③より

$$\begin{aligned}\sqrt{6}(\sqrt{2} - 1)s &= 4\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow s &= \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}(\sqrt{2} - 1)} \\ &= \frac{4\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}(\sqrt{2} + 1)}{6(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} \\ &= \frac{24 + 12\sqrt{2}}{6} \\ &= 4 + 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

となる。また， $t = (2 - \sqrt{2})s$ より

$$\begin{aligned}t &= (2 - \sqrt{2})s \\ &= (2 - \sqrt{2})(4 + 2\sqrt{2}) \\ &= 4\end{aligned}$$

となる。

[2] (a)

6色で塗り分けるには，6つの色を並べかえ①から順に当てはめればよいから，求める場合の数は

$$6! = 720 \text{ (通り)}$$

となる。

(b)

まず，2回同じ色を使う部分の候補として(①，④)，(①，⑤)，(①，⑥)，(②，④)，(③，⑥)，(④，⑤)，(④，⑥)の7通りが考えられ，その2つの部分に使う色の候補として5通り考えられる。残った4つの部分を4色で塗り分ければよいから，求める場合の数は

$$7 \cdot 5 \cdot 4! = 7 \cdot 5 \cdot 24 = 840 \text{ (通り)}$$

となる。

(c)

4色の使い方で場合を分ける。

[1]同じ色を3回，残った3色を1回ずつ使う場合

同じ色を3回使う場所の候補として，(①，④，⑤)，(①，④，⑥)の2通りが考えられ，その部分に使う色の候補として4通り考えられる。残りの3つの部分を3色で塗り分ければよいから

$$2 \cdot 4 \cdot 3! = 48 \text{ (通り)}$$

となる。

[2]2色を2回ずつ，残った2色を1回ずつ使う場合

同じ色を使う場所の候補として，(①，④)と(③，⑥)，(①，⑤)と(②，④)，(①，⑤)と(③，⑥)，(①，⑤)と(④，⑥)，(①，⑥)と(②，④)，(①，⑥)と(④，⑤)，(②，④)と(③，⑥)，(③，⑥)と(④，⑤)の8つが考えられ，その部分に使う色の候補として， $4 \cdot 3 = 12$ 通り考えられる。残りの2つの部分を2色で塗り分ければよいから

$$8 \cdot 12 \cdot 2! = 8 \cdot 12 \cdot 2 = 192 \text{ (通り)}$$

となる。

[1]，[2]より，求める場合の数は

$$48 + 192 = 240 \text{ (通り)}$$

となる。

(d)

①から順に塗り分け方を考えていく。①は特に制限がないから3通り，②は①と異なる2色から選ぶため2通り，③は①，②と異なる色を選ぶため1通り，④は③と異なる2色から選ぶため2通り，⑤は②，③と異なる色を選ぶため1通り，⑥は②，⑤と異なる色を選ぶため1通りとなる。以上より，求める場合の数は

$$3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 12 \text{ (通り)}$$

となる。

[3]

放物線 F_1 上の点 $(t, t^2 + 12t + 2)$ (t は実数) における接線を考える。 $f(x) = x^2 + 12x + 2$ ，

$g(x) = x^2 - 6x + 11$ とおくと， $f'(x) = 2x + 12$ より， $f'(t) = 2t + 12$ となるから，求める接線の方程式は

$$\begin{aligned}y - (t^2 + 12t + 2) &= (2t + 12)(x - t) \\ \Leftrightarrow y &= (2t + 12)x - (2t^2 + 12t) + (t^2 + 12t + 2) \\ \Leftrightarrow y &= (2t + 12)x - t^2 + 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。ここで，①と放物線 F_2 の共有点を求めると

$$\begin{aligned}x^2 - 6x + 11 &= (2t + 12)x - t^2 + 2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2(t + 9)x + (t^2 + 9) &= 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}\end{aligned}$$

となる。ここで，②の解は，①と F_1 の共有点の x 座標となるから，①と F_1 が接するとき②は重解を持つ。したがって②の判別式 $D = 0$ となればよいから

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow (t + 9)^2 - (t^2 + 9) &= 0 \\ \Leftrightarrow 18t &= -72 \\ \therefore t &= -4\end{aligned}$$

となる。よって①より， F_1 と F_2 の両方に接する直線 l は $y = 4x - 14$ と求められ，直線 l と放物線 F_1 の接点は $(-4, -30)$ と求められる。また②より，直線 l と放物線 F_2 の接点の x 座標は

$$\begin{aligned}x^2 - 10x + 25 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 5)^2 &= 0 \\ \therefore x &= 5\end{aligned}$$

と求められ， $g(5) = 6$ より，直線 l と放物線 F_2 の接点は $(5, 6)$ と求められる。ここで，放物線 F_1 と F_2 の交点の x 座標を求めると

$$\begin{aligned}x^2 + 12x + 2 &= x^2 - 6x + 11 \\ \Leftrightarrow 18x &= 9 \\ \therefore x &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となるから，放物線 F_1 ， F_2 ，直線 l を図示すると下図のようになる。

F_1 ， F_2 ， l で囲まれた部分の S とすると

$$\begin{aligned}S &= \int_{\frac{1}{2}}^5 \{(x^2 - 6x + 11) - (4x - 14)\} dx + \int_{-4}^{\frac{1}{2}} \{(x^2 + 12x + 2) - (4x - 14)\} dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^5 (x^2 - 10x + 25) dx + \int_{-4}^{\frac{1}{2}} (x^2 + 8x + 16) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 25x \right]_{\frac{1}{2}}^5 + \left[\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 + 16x \right]_{-4}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{125}{3} - 125 + 125 \right) - \left(\frac{1}{24} - \frac{5}{4} + \frac{25}{2} \right) + \left(\frac{1}{24} + 1 + 8 \right) - \left(-\frac{64}{3} + 64 - 64 \right) \\ &= \frac{243}{4}\end{aligned}$$

となる。

Ⅱ

【解答】

ア	104	イ	10	ウ	68	エ	$\frac{100}{1.04}$
オ	$\frac{1}{1.04}$	カ	1350	キ	738	ク	0.82
ケ	3526	コ	2.14				

【解説】

〔1〕

もとの預金額が X 円のとき、 $0.04X$ 円の利子が付くから、元利合計は $1.04X$ となる。よって、100 万円を預金すると、 $100 \text{ 万} \times 1.04 = 104 \text{ 万円}$ となる。

〔2〕

複利法では毎年預金額が 1.04 倍になるから、100 万円を預金すると、10 年後には 100×1.04^{10} 万円になる。また〔1〕より、元の預金が 1.04 倍になると元の預金額自体の価値は $\frac{1}{1.04}$ 倍になるから、100 万円を 10 年預金すると、100 万円の価値は、 $100 \times \frac{1}{1.04^{10}} = 100 \times 0.68 = 68 \text{ 万円}$ となる。

〔3〕

a_t の単位を億円で考える。1 年後に得られる収益の現在価値は 1 年後の時点での金額の $\frac{1}{1.04}$ 倍となるから、 $a_1 = \frac{100}{1.04}$ となる。また、1 年ごとに現在価値は前の年の $\frac{1}{1.04}$ 倍となるから、 a_t は公比 $\frac{1}{1.04}$ の等比数列となる。よって、 $a_t = \frac{100}{1.04} \cdot \left(\frac{1}{1.04}\right)^{t-1}$ と表せるから、20 年間で生み出す収益の現在価値の合計は

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{20} a_t &= \frac{\frac{100}{1.04} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{1.04}\right)^{20} \right\}}{1 - \frac{1}{1.04}} \\ &= \frac{\frac{100}{1.04} (1 - 0.46)}{\frac{0.04}{1.04}} \\ &= \frac{100 \cdot 0.54}{0.04} \\ &= 1350\end{aligned}$$

となり、1350 億円と求められる。

〔4〕

b_t の単位を億円で考える。1 年後の収益は $\frac{900}{(1.04)^4}$ 億円であり、その現在価値は 1 年で $\frac{1}{1.04}$ 倍となるから、

$$\begin{aligned}b_1 &= \frac{900}{1.04^4} \cdot \frac{1}{1.04} \\ &= 900 \cdot \frac{1}{1.04^5} \\ &= 900 \cdot 0.82 \\ &= 738\end{aligned}$$

となる。また、この施設は 1 年ごとに収益が $\frac{1}{1.04^4}$ 倍になり、そのたびに現在価値も $\frac{1}{1.04}$ 倍になるから、 b_t は公比 $\frac{1}{1.04^5} = 0.82$ の等比数列となる。よって、 $b_t = \frac{900}{(1.04)^{5t}}$ と表せるから、この施設が 10 年間で生み出す収益の現在価値の合計は

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{10} b_t &= \frac{\frac{900}{1.04^5} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{1.04}\right)^{50} \right\}}{1 - \frac{1}{1.04^5}} \\ &= \frac{900 \cdot 0.82 \cdot (1 - 0.14)}{1 - 0.82} \\ &= \frac{634.68}{0.18} \\ &= 3526\end{aligned}$$

となり、3526 億円と求められる。

〔5〕

$S = 3526$ 億円とする。1, 2, 3 機めの発電施設が生み出す収益の現在価値はそれぞれ

$S, \frac{1}{1.04^{10}} S, \frac{1}{1.04^{20}} S$ であるので、合計 30 年にわたって生み出される収益の現在価値の合計は、

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{1.04^{10}} + \frac{1}{1.04^{20}} \right) \times 3526 &= (1 + 0.68 + 0.46) \times 3526 \\ &= 3526 \times 2.14\end{aligned}$$

より 2.14×3526 億円である。

Ⅲ

[1]

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \text{ より,}$$
$$\tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} - 1$$

と求められる。

(答) $\tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} - 1$

[2]

[1] より

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta}$$
$$= \frac{1}{1 + x^2}$$

と変形できる。また、倍角の公式より、 $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$ であるから

$$\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$$
$$= 2 \cdot \frac{1}{1 + x^2} - 1$$
$$= \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$$

と求められる。また、

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$
$$= \frac{2x}{1 - x^2}$$

より、

$$\sin 2\theta = \cos 2\theta \cdot \tan 2\theta$$
$$= \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \cdot \frac{2x}{1 - x^2}$$
$$= \frac{2x}{1 + x^2}$$

と求められる。

(答) $\sin 2\theta = \frac{2x}{1 + x^2}, \cos 2\theta = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$

[3] (a)

[2] より

$$\frac{7 + 6x - x^2}{1 + x^2} = \frac{3 \cdot 2x}{1 + x^2} + \frac{4(1 - x^2)}{1 + x^2} + \frac{3(1 + x^2)}{1 + x^2}$$
$$= 3\sin 2\theta + 4\cos 2\theta + 3$$

と変形できる。

(答) $\frac{7 + 6x - x^2}{1 + x^2} = 3\sin 2\theta + 4\cos 2\theta + 3$

(b)

求められた式より

$$3\sin 2\theta + 4\cos 2\theta + 3 = 5\sin(2\theta + \alpha) + 3 \cdots \textcircled{1}$$

と変形できる。ただし、 $\sin \alpha = \frac{4}{5}, \cos \alpha = \frac{3}{5}$ である。仮定より、 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ であるから、 $\textcircled{1}$ の式は

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$
$$\Leftrightarrow -\pi < 2\theta < \pi$$
$$\Leftrightarrow -\pi + \alpha < 2\theta + \alpha < \pi + \alpha$$
$$\Leftrightarrow -1 \leq \sin(2\theta + \alpha) \leq 1$$
$$\Leftrightarrow -2 \leq 5\sin(2\theta + \alpha) + 3 \leq 8$$

と変形できる。よって、分数式の最大値は8と求められる。

(答) 8

[4]

[3] より、 $\textcircled{1}$ が最大値をとるのは $\sin(2\theta + \alpha) = 1$ のときであるから

$$\sin(2\theta + \alpha) = 1$$
$$\Leftrightarrow \sin 2\theta \cos \alpha + \cos 2\theta \sin \alpha = 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{5} \cdot \frac{2x}{1 + x^2} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1 - x^2}{1 + x^2} = 1$$
$$\Leftrightarrow 6x + 4(1 - x^2) = 5(1 + x^2)$$
$$\Leftrightarrow 9x^2 - 6x + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow (3x - 1)^2 = 0$$
$$\therefore x = \frac{1}{3}$$

と求められる。

(答) $x = \frac{1}{3}$