

I

【解答】

ア	1	イ	$\sqrt{3}$	ウ	$\frac{8\pi}{3}-2\sqrt{3}$	エ	$2\sqrt{2}-1$
オ	$-2\sqrt{2}+1$	カ	$12+8\sqrt{2}$	キ	$24-8\sqrt{5}$		
ク	$\frac{7}{216}$	ケ	$\frac{181}{216}$	コ	$\frac{1}{9}$	サ	$\frac{1}{4}$
シ	-2	ス	3	セ	$\frac{1}{2}$	ソ	$\frac{3}{4}$
タ	$\frac{125}{8}$	チ	$\frac{125}{48}$				

【解説】

〔1〕

(a)

$$(|x|+1)^2+y^2=4$$

のグラフと x 軸との共有点の x 座標は、 $y=0$ を代入し

$$\begin{aligned}(|x|+1)^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow |x|+1 &= \pm 2 \\ \Leftrightarrow |x| &= -3, 1 \\ \therefore x &= \pm 1 \quad (\because |x| > 0)\end{aligned}$$

となる。次に y 軸との共有点の y 座標は、 $x=0$ を代入し

$$\begin{aligned}1^2+y^2 &= 4 \\ \therefore y &= \pm\sqrt{3}\end{aligned}$$

となる。

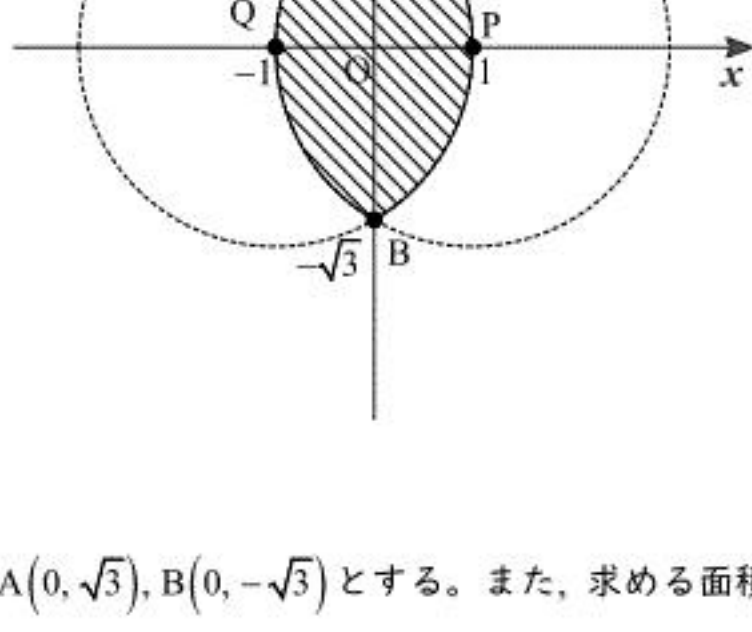
(b)

D は

$$x \geq 0 \text{ のとき } (x+1)^2+y^2 \leq 4$$

$$x < 0 \text{ のとき } (x-1)^2+y^2 \leq 4$$

として表される領域である。よって、 D は下図の斜線部である。



$P(1, 0), Q(-1, 0), A(0, \sqrt{3}), B(0, -\sqrt{3})$ とする。また、求める面積を S とすると

$$S = 2(\text{扇形 PAB} - \triangle PAB)$$

である。ここで

$$\angle APB = 2\angle APO = \frac{2}{3}\pi$$

$$PA = 2$$

であるので

$$S = 2\left(\frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 1\right) = \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}$$

となる。

(c)

$$x+y=k \quad (k \in R)$$

とする。この式が表す直線が D と共有点をもつような k の最大値・最小値が求める最大値・最小値である。この直線と、 Q を中心とする半径 2 の円が接するとき

$$\frac{|-1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 - k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2$$

$$\therefore |k+1| = 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow k = -1 \pm 2\sqrt{2}$$

となる。また、 $k = 2\sqrt{2}-1$ のときの接点を R とすると、

$$\angle RQP = \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{3} = \angle AQP$$

となることより T は D に含まれる。よって求める最大値は

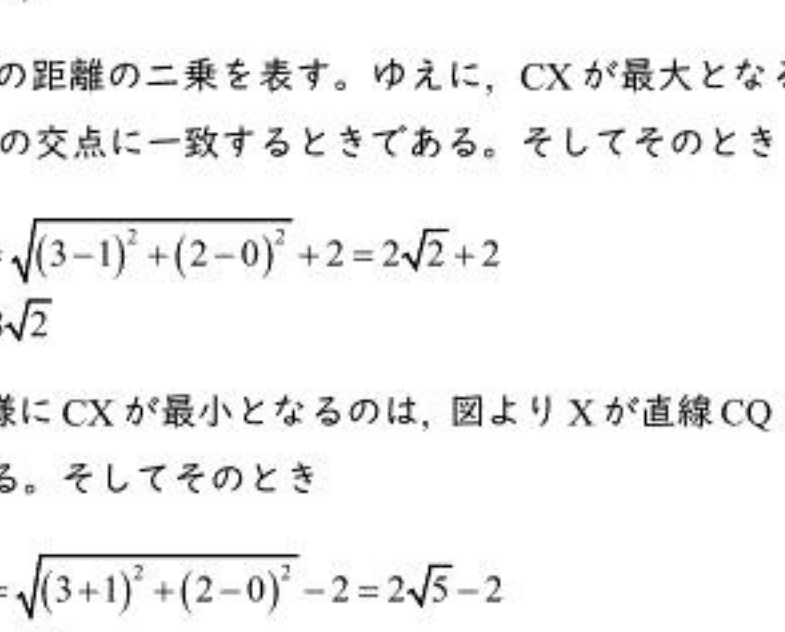
$$2\sqrt{2}-1$$

である。そして D の原点に関する対称性より求める最小値は

$$-2\sqrt{2}+1$$

である。

(d)



$(3, 2)$ を点 C とする。 D 上の任意の点を $X(x, y)$ とすると

$$(x-3)^2+(y-2)^2$$

は点 C と点 X との距離の二乗を表す。ゆえに、 CX が最大となるのは、図より X が直線 CP と円弧 QB との交点に一致するときである。そしてそのとき

$$CX = CP + 2 = \sqrt{(3-1)^2 + (2-0)^2} + 2 = 2\sqrt{2} + 2$$

$$\therefore CX^2 = 12 + 8\sqrt{2}$$

である。また同様に CX が最小となるのは、図より X が直線 CQ と円弧 AP との交点に一致するときである。そしてそのとき

$$CX = CQ - 2 = \sqrt{(3+1)^2 + (2-0)^2} - 2 = 2\sqrt{5} - 2$$

$$\therefore CX^2 = 24 - 8\sqrt{5}$$

である。

〔2〕

(a)

条件を満たすのは出た目がすべて 5 または 6 であり、少なくとも 1 回は 5 が出るときである。よって求める確率は 3 回とも 5 または 6 が出る確率から 3 回とも 6 が出る確率を引いたものである。よって

$$\left(\frac{2}{6}\right)^3 - \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{7}{216}$$

である。

(b)

与条件の事象の余事象は

$$m \geq 5 \text{ または } M \leq 3$$

である。 $m \geq 5$ となる条件は 3 回とも 5 または 6 が出ることであり、 $M \leq 3$ となる条件は 3 回とも 1, 2, 3 のいずれかが出ることである。これらは互いに排反であるので求める確率は

$$1 - \left\{ \left(\frac{2}{6}\right)^3 + \left(\frac{3}{6}\right)^3 \right\} = \frac{181}{216}$$

である。

(c)

与条件を満たすような目の出方の組み合わせは

$$(2, 2, 6), (2, 3, 6), (2, 4, 6), (2, 5, 6), (2, 6, 6)$$

である。これらの並べ替えを考えると、目の出方の総数は $6^3 = 216$ 通りであるので求める確率は

$$\frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 3!}{216} = \frac{1}{9}$$

である。

(d)

与条件を満たす組み合わせは

$$(m, M) = (1, 4), (2, 5), (3, 6)$$

である。 $(m, M) = (1, 4)$ となるような目の出方の組み合わせは

$$(1, 1, 4), (1, 2, 4), (1, 3, 4), (1, 4, 4)$$

である。これらの並べ替えは

$$2 \cdot 3 + 2 \cdot 3! = 18 \quad \text{通り}$$

存在する。 $(m, M) = (2, 5), (3, 6)$ のときも同様であるので求める確率は

$$\frac{3 \cdot 18}{216} = \frac{1}{4}$$

である。

〔3〕

$$y = \frac{1}{4}x^2 + 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

のとき

$$y' = \frac{1}{2}x$$

であるので、 $\textcircled{1}$ の $\left(t, \frac{1}{4}t^2 + 1\right) (t \in R)$ における接線は

$$y = \frac{1}{2}t(x-t) + \frac{1}{4}t^2 + 1 = \frac{t}{2}x - \frac{1}{4}t^2 + 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

と表せる。これが $(-5, 7)$ を通るとき

$$7 = -\frac{5}{2}t - \frac{1}{4}t^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 10t + 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t+6)(t+4) = 0$$

$$\therefore t = -6, -4$$

である。ここで $-6 < -4$ より l_1 に関して $t = -4$ となるので

$$l_1: y = -2x - 3$$

である。また、 l_2 は l_1 と垂直なので、傾きは $\frac{1}{2}$ である。このとき、 $\textcircled{2}$ において

$$\frac{1}{2} = \frac{t}{2} \Leftrightarrow t = 1$$

となる。ゆえに、 $\textcircled{2}$ より

$$l_2: y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$$

である。 l_1 に関して $t = -4$ なので、 l_1 と $\textcircled{1}$ の接点の座標は $A(-4, 5)$ であり、 l_2 に関して $t = 1$ なので、 l_2 と $\textcircled{1}$ の接点の座標は $C\left(1, \frac{5}{4}\right)$ である。また、 l_1 と l_2 とを連立し

$$-2x - 3 = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$$

$$\therefore x = -\frac{3}{2}$$

となるので l_1 と l_2 の交点の座標は $B\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ である。ここで

$$AB = \sqrt{\left(-4 + \frac{3}{2}\right)^2 + 5^2} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$$

$$BC = \sqrt{\left(1 + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2} = \frac{5\sqrt{5}}{4}$$

であることより長方形 $ABCD$ の面積は

$$\frac{5\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{5\sqrt{5}}{4} = \frac{125}{8}$$

である。また、 $\textcircled{1}$ と l_1, l_2 で囲まれた部分の面積は下図の斜線部の面積である。

よって求める面積を S として

$$S = \int_{-4}^{-\frac{3}{2}} \left\{ \left(\frac{1}{4}x^2 + 1\right) - (-2x - 3) \right\} dx + \int_{-\frac{3}{2}}^1 \left\{ \left(\frac{1}{4}x^2 + 1\right) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right) \right\} dx$$

$$= \int_{-4}^{-\frac{3}{2}} (x+4)^2 dx + \int_{-\frac{3}{2}}^1 \frac{1}{4}(x-1)^2 dx$$

$$= \left[\frac{1}{12}(x+4)^3 \right]_{-4}^{-\frac{3}{2}} + \left[\frac{1}{12}(x-1)^3 \right]_{-\frac{3}{2}}^1$$

$$= \frac{125}{48}$$

である。

II

〔解答〕

ア	(160)	イ	(150)	ウ	1080	エ	200
オ	1061	カ	1081	キ	1080	ク	1088
ケ	1080	コ	180	サ	$X_1 < X_0$	シ	180
ス	$X_2 < X_0$						

＊問題文にある $800 \leq P \leq 1600$ という条件の下ではア、イを解くことができない(出題ミス)ので、ア、イに限ってはその条件がないものとして解答を作成しました。

〔解説〕

$P=1081$ のとき与式より

$$A = \left[\sqrt{20(3081-1801)} \right] = [160] = 160$$

である。 $P=730$ のときは与式より

$$B = \left[\sqrt{50(730-280)} \right] = [150] = 150$$

である。③より

$$20(3081-Q) = 50(Q-280)$$

$$\therefore Q = \frac{7562}{7} = 1080.2\cdots$$

となるため、 $Q=1080$ である。よって $P=1080$ のとき

$$A = \left[\sqrt{20(3081-1080)} \right] = \left[\sqrt{40020} \right] = 200$$

$$(\because 200^2 = 40000 < 40020 < 40401 = 201^2)$$

$$B = \left[\sqrt{50(1080-280)} \right] = [200] = 200$$

である。このとき、④より

$$200^2 \leq 20(3081-P) < 201^2$$

$$\Leftrightarrow 2000 \leq 3081-P < 2020.05$$

$$\Leftrightarrow 1060.95 < P \leq 1081 \quad \cdots \textcircled{6}$$

となる。これを満たす最小の P は 1061、最大の P は 1081 である。これは $800 \leq P \leq 1600$ を満たしている。また、⑤より

$$200^2 \leq 50(P-280) < 201^2$$

$$\Leftrightarrow 800 \leq P-280 < 808.02$$

$$\Leftrightarrow 1080 \leq P < 1088.02 \quad \cdots \textcircled{7}$$

であるため、これを満たす最小の P は 1080、最大の P は 1088 である。これは $800 \leq P \leq 1600$ を満たしている。よって⑥、⑦をとともに満たす最小の P は 1080 である。次に

$P_1 = P_0 + 381 = 1461$ を①、②にそれぞれ代入すると

$$A = \left[\sqrt{20(3081-1461)} \right] = \left[\sqrt{32400} \right]$$

$$B = \left[\sqrt{50(1461-280)} \right] = \left[\sqrt{59050} \right]$$

となるので $A = \left[\sqrt{32400} \right] = [180] = 180 < B$ が成立する。ゆえに $X_1 = 180$ であり、 $X_1 < X_0$

となる。さらに $P_2 = P_0 - 152 = 928$ を①、②にそれぞれ代入すると

$$A = \left[\sqrt{20(3081-928)} \right] = \left[\sqrt{43060} \right]$$

$$B = \left[\sqrt{50(928-280)} \right] = \left[\sqrt{32400} \right]$$

となるので $B = \left[\sqrt{32400} \right] = [180] = 180 < A$ が成立する。ゆえに $X_2 = 180$ であり、 $X_2 < X_0$

となる。

Ⅲ

[1]

与条件より

$$a_2 = 5 - \frac{4}{a_1} = 5 - \frac{4}{2} = 3$$

$$a_3 = 5 - \frac{4}{a_2} = 5 - \frac{4}{3} = \frac{11}{3}$$

であるので

$$b_2 = a_1 \times a_2 = 2 \cdot 3 = 6$$

$$b_3 = a_1 \times a_2 \times a_3 = 2 \cdot 3 \cdot \frac{11}{3} = 22$$

となる。

(答) $b_2 = 6, b_3 = 22$

[2]

与条件より, $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n \times a_{n+1} \\ &= a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n \times \left(5 - \frac{4}{a_n}\right) \\ &= 5(a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n) - 4(a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_{n-1}) \\ &= 5b_n - 4b_{n-1} \end{aligned}$$

となる。

(答) $b_{n+1} = 5b_n - 4b_{n-1}$

[3]

[2] より, $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 5b_n - 4b_{n-1} \\ \Leftrightarrow b_{n+1} - b_n &= 4(b_n - b_{n-1}) \\ \therefore c_n &= 4c_{n-1} \quad (\because c_n = b_{n+1} - b_n) \end{aligned}$$

となる。ゆえに数列 $\{c_n\}$ は初項 $c_1 = b_2 - b_1 = 6 - a_1 = 4$, 公比 4 の等比数列であるため

$$c_n = 4 \cdot 4^{n-1} = 4^n$$

となる。

(答) $c_n = 4^n$

[4]

$c_n = b_{n+1} - b_n$ なので, $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \\ &= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 4^k \\ &= 2 + 4 \cdot \frac{4^{n-1} - 1}{4 - 1} \\ &= \frac{4^n + 2}{3} \end{aligned}$$

である。また, $b_1 = 2 = \frac{4^1 + 2}{3}$ であるので上式は $n=1$ のときも成立する。したがって $b_n = \frac{4^n + 2}{3}$

となる。

(答) $b_n = \frac{4^n + 2}{3}$

[5]

[4] より $n \geq 2$ のとき

$$a_n = \frac{a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n}{a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_{n-1}} = \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{\frac{4^n + 2}{3}}{\frac{4^{n-1} + 2}{3}} = \frac{4^n + 2}{4^{n-1} + 2} \quad (\because b_{n-1} > 0)$$

となる。また, $a_1 = 2 = \frac{4^1 + 2}{4^{1-1} + 2}$ であるので上式は $n=1$ のときも成立する。したがって

$$a_n = \frac{4^n + 2}{4^{n-1} + 2} \text{ となる。}$$

(答) $a_n = \frac{4^n + 2}{4^{n-1} + 2}$