

【解答】

〔1〕	$\boxed{\text{ア}}$	$\boxed{\text{イ}}$	$\boxed{\text{ウ}}$		
	$\frac{r+2}{r}x$	$\frac{r+2}{2}y$	$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{4}$		
〔2〕	$\boxed{\text{エ}}$	$\boxed{\text{オ}}$	$\boxed{\text{カ}}$		
	$r^2s^2 + 4$	$r^2t^2 - 4r^2$	$t^2 - r^2s^2$		
〔3〕	$\boxed{\text{キ}}$	$\boxed{\text{ク}}$	$\boxed{\text{ケ}}$	$\boxed{\text{コ}}$	$\boxed{\text{サ}}$
	$ux - up + q$	$-\frac{1}{u}x + \frac{p}{u} + q$	$r^2 - p^2$	$4 - q^2$	$r^2 + 4$

【解説】

〔1〕

点Pは線分ABを $2:r$ に内分する点であるので、

$$\begin{aligned}x &= \frac{r \cdot a + 2 \cdot 0}{2+r} \\&= \frac{ra}{2+r} \\y &= \frac{r \cdot 0 + 2 \cdot b}{2+r} \\&= \frac{2b}{2+r}\end{aligned}$$

と表すことができる。よって、

$$a = \frac{r+2}{r}x, b = \frac{r+2}{2}y$$

である。ここで題意より $AB=r+2$ であるので、 $r>2$ に注意して曲線Cの方程式は、

$$\begin{aligned}AB^2 &= (r+2)^2 \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 &= (r+2)^2 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{r+2}{r}x\right)^2 + \left(\frac{r+2}{2}y\right)^2 &= (r+2)^2 \\ \therefore \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{4} &= 1\end{aligned}$$

となる。

〔2〕

$y = sx + t$ を〔1〕で求めた曲線Cの式に代入して、

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{r^2} + \frac{(sx+t)^2}{4} &= 1 \\ \Leftrightarrow 4x^2 + r^2(s^2x^2 + 2stx + t^2) &= 4r^2 \\ \Leftrightarrow (r^2s^2 + 4)x^2 + 2r^2stx + (r^2t^2 - 4r^2) &= 0 \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。ここで①の判別式を D とおくと、直線 l_1 が曲線Cと接するための必要十分条件は $D=0$ となることである。以上より満たすべき条件は、

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow (r^2st)^2 - (r^2s^2 + 4)(r^2t^2 - 4r^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow r^4s^2t^2 - r^4s^2t^2 + 4r^4s^2 - 4r^2t^2 + 16r^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow r^2s^2 - t^2 + 4 = 0 (\because r \neq 0) \\ \therefore t^2 - r^2s^2 &= 4 \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

である。

〔3〕

直線 l_2 は、傾き u であり、点Q(p, q)を通るので、

$$\begin{aligned}y &= u(x-p) + q \\ &= ux - up + q\end{aligned}$$

と表すことができる。同様に、直線 l_3 は、傾き $-\frac{1}{u}$ であり、点Q(p, q)を通るので、

$$\begin{aligned}y &= -\frac{1}{u}(x-p) + q \\ &= -\frac{1}{u}x + \frac{p}{u} + q\end{aligned}$$

と表すことができる。直線 l_2 が曲線Cの接線となるための必要十分条件は、〔2〕より②において $s \rightarrow u, t \rightarrow (-up + q)$ と置き換えて、

$$\begin{aligned}(-up + q)^2 - r^2u^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow (r^2 - p^2)u^2 + 2pqu + (4 - q^2) &= 0 \quad \dots \textcircled{3}\end{aligned}$$

となる。同様に直線 l_3 が曲線Cの接線となるための必要十分条件は、〔2〕より②において

$s \rightarrow -\frac{1}{u}, t \rightarrow \frac{p}{u} + q$ と置き換えて、

$$\begin{aligned}\left(\frac{p}{u} + q\right)^2 - r^2\left(-\frac{1}{u}\right)^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow (4 - q^2)u^2 - 2pqu + (r^2 - p^2) &= 0 \quad \dots \textcircled{4}\end{aligned}$$

となる。よって直線 l_2 と直線 l_3 の両方が曲線Cの接線であるのは、③と④が0以外の共通な実数解をもつときである。ここで③と④の両辺を加えて、

$$\begin{aligned}\{(r^2 - p^2)u^2 + 2pqu + (4 - q^2)\} + \{(4 - q^2)u^2 - 2pqu + (r^2 - p^2)\} &= 0 \\ \Leftrightarrow (r^2 - p^2 + 4 - q^2)u^2 + (r^2 - p^2 + 4 - q^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow (r^2 - p^2 + 4 - q^2)(u^2 + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow r^2 - p^2 + 4 - q^2 = 0 (\because u^2 + 1 > 0) \\ \therefore p^2 + q^2 &= r^2 + 4\end{aligned}$$

となる。以上より求める方程式は、 $p^2 + q^2 = r^2 + 4$ である。

【解答】

〔1〕	ア	イ	ウ	エ	オ
	1	b'	a'	$mb' + \ell x_0$	$-ma' + \ell y_0$
〔2〕	カ	キ	ク	ケ	コ
	$-a^2 + 4b\ell$	$\sqrt{a^2 - 4b\ell + 4b^2c}$	$\frac{-2b\ell x_0 + a}{2b^2}$	6	14

【解説】

〔1〕

題意より a と b の最大公約数は d であるので、 $a = a'd, b = b'd$ と表すと a' と b' は互いに素である。よって a' と b' の最大公約数は 1 である。また (4) より、

$$\begin{aligned} a'(x - \ell x_0) + b'(y - \ell y_0) &= 0 \\ \Leftrightarrow a'(x - \ell x_0) &= -b'(y - \ell y_0) \end{aligned}$$

であるので $x - \ell x_0$ は b' の倍数であり、 $y - \ell y_0$ は a' の倍数である。ここで整数 m を用いて、

$$\begin{cases} \frac{x - \ell x_0}{b'} = m \\ -\frac{y - \ell y_0}{a'} = m \end{cases}$$

とおけるので、これらの式を解いて、

$$\begin{cases} x = mb' + \ell x_0 \\ y = -ma' + \ell y_0 \end{cases}$$

と表すことができる。

〔2〕

題意より $d = 1$ であるので〔1〕より $a = a', b = b'$ である。 $y = -x^2 + c$ と $ax + by = \ell$ を連立して、

$$\begin{aligned} ax + b(-x^2 + c) &= \ell \\ \Leftrightarrow bx^2 - ax + \ell - bc &= 0 \qquad \qquad \qquad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。ここで $y = -x^2 + c$ と $ax + by = \ell$ が異なる 2 つの共有点をもつことは、①の判別式が異なる 2 解をもつことと同値である。よって①の判別式を D とすると、

$$\begin{aligned} D &> 0 \\ \Leftrightarrow (-a)^2 - 4 \cdot b \cdot (\ell - bc) &> 0 \\ \Leftrightarrow c &> \frac{-a^2 + 4b\ell}{4b^2} \end{aligned}$$

となる。このとき共有点の x 座標は①において解の公式を用いて、

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-a) \pm \sqrt{(-a)^2 - 4 \cdot b \cdot (\ell - bc)}}{2b} \\ &= \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b\ell + 4b^2c}}{2b} \end{aligned}$$

となる。また〔1〕で求めた $(x, y) = (mb' + \ell x_0, -ma' + \ell y_0)$ が $y < -x^2 + c$ を満たすためには、

$$\begin{aligned} \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b\ell + 4b^2c}}{2b} < x < \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b\ell + 4b^2c}}{2b} \\ \Leftrightarrow \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b\ell + 4b^2c}}{2b} < mb + \ell x_0 < \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b\ell + 4b^2c}}{2b} \\ \therefore \frac{-2b\ell x_0 + a}{2b^2} - \frac{\sqrt{a^2 - 4b\ell + 4b^2c}}{2b^2} < m < \frac{-2b\ell x_0 + a}{2b^2} + \frac{\sqrt{a^2 - 4b\ell + 4b^2c}}{2b^2} \dots \textcircled{6} \end{aligned}$$

を満たす必要がある。さらに $a = 2, b = 3, \ell = 2$ のとき(3)は、 $2x + 3y = 1$ となり整数解の 1 つが $(x_0, y_0) = (-1, 1)$ であるので、(6)は、

$$\frac{7}{9} - \frac{\sqrt{9c - 5}}{9} < m < \frac{7}{9} + \frac{\sqrt{9c - 5}}{9}$$

となる。これを満たす m がちょうど 2 個存在する条件は、

$$\begin{aligned} -1 &\leq \frac{7}{9} - \frac{\sqrt{9c - 5}}{9} < 0 \\ 1 &< \frac{7}{9} + \frac{\sqrt{9c - 5}}{9} \leq 2 \end{aligned}$$

である。これらを解いて、

$$\frac{7}{9} < \frac{\sqrt{9c - 5}}{9} \leq \frac{11}{9} \Leftrightarrow 6 < c \leq 14$$

となる。

Ⅲ

【解答】

〔1〕	$\boxed{\text{ア}}$	$\boxed{\text{イ}}$	$\boxed{\text{ウ}}$		
	$\frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$	1	$\frac{1-t^2}{1+t^2}$		
〔2〕	$\boxed{\text{エ}}$				
	$\sqrt{2}-1$				
〔3〕	$\boxed{\text{オ}}$	$\boxed{\text{カ}}$	$\boxed{\text{キ}}$	$\boxed{\text{ク}}$	$\boxed{\text{ケ}}$
	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$2\alpha-\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{2}\pi-2\alpha$
〔4〕	$\boxed{\text{コ}}$	$\boxed{\text{サ}}$			
	$I+J$	π			

【解説】

〔1〕

題意より $f(t)=\frac{2t}{1+t^2}$ であるので、

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{2\cdot(1+t^2)-2t\cdot2t}{(1+t^2)^2} \\ &= \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} \end{aligned}$$

である。 $0\leqq t\leqq 1$ において $f'(t)\geqq 0$ であるので、 $f(t)$ は単調増加である。また、

$$\begin{cases} f(0)=0 \\ f(1)=1 \end{cases}$$

であるので求める $f(t)$ の値域は $0\leqq f(t)\leqq 1$ となる。さらに $0\leqq t\leqq 1$ に注意して、

$$\begin{aligned} \sqrt{1-\{f(t)\}^2} &= \sqrt{1-\frac{(2t)^2}{(1+t^2)^2}} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2} \\ &= \left|\frac{1-t^2}{1+t^2}\right| \\ &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{aligned}$$

となる。

〔2〕

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ において $\tan\alpha=\sqrt{2}+1$ のとき、

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \frac{1}{\tan\alpha} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}+1} \\ &= \sqrt{2}-1 \end{aligned}$$

である。

〔3〕

題意より $\sin\theta=f(t)$ とおくと、 $\cos\theta\frac{d\theta}{dt}=f'(t)$ であり、 θ が $0\rightarrow\frac{\pi}{2}$ を動くとき t は $0\rightarrow 1$ を動く。また、

$$\begin{aligned} \sqrt{1-\{f(t)\}^2} &= \sqrt{1-\sin^2\theta} \\ &= \sqrt{\cos^2\theta} \\ &= |\cos\theta| \\ &= \cos\theta \end{aligned}$$

であるので、

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{2}+\sin\theta} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2}+f(t)} \cdot \frac{f'(t)}{\cos\theta} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2}+\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1} dt \\ &= \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{\left(t+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} dt \end{aligned}$$

となる。ここで $t+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\tan u$ とおくと、 $\frac{dt}{du}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\cos^2 u}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\tan^2 u+1)$ であり、 t が

$0\rightarrow 1$ を動くとき u は $\frac{\pi}{4}\rightarrow\alpha$ を動く。よって、

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\alpha} \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\tan^2 u+\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(\tan^2 u+1) du \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\alpha} 2 du \\ &= [2u]_{\frac{\pi}{4}}^{\alpha} \\ &= 2\alpha-\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

となる。同様にして、

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{2}-\sin\theta} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2}-f(t)} \cdot \frac{f'(t)}{\cos\theta} dt \\ &= \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{\left(t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} dt \end{aligned}$$

となるので $t-\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\tan s$ とおくと t が $0\rightarrow 1$ を動くとき s は $-\frac{\pi}{4}\rightarrow\frac{\pi}{2}-\alpha$ を動く。よって、

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{\left(t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} 2 ds \\ &= [2s]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \\ &= \frac{3}{2}\pi-2\alpha \end{aligned}$$

となる。

〔4〕

$x=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta$ とおくと $\frac{dx}{d\theta}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta$ であり、 x が $0\rightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}-0$ を動くとき θ は $0\rightarrow\frac{\pi}{2}-0$ を動く。また、

$$\begin{aligned} \sqrt{1-2x^2} &= \sqrt{1-\sin^2\theta} \\ &= \sqrt{\cos^2\theta} \\ &= |\cos\theta| \\ &= \cos\theta \end{aligned}$$

であるので、

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-2x^2}} &= \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\theta\right)\sqrt{1-\sin^2\theta}} \\ &= \frac{2}{(2-\sin^2\theta)\cos\theta} \end{aligned}$$

である。以上より、 $\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-2x^2}}$ が偶関数であることに注意して、

$$\begin{aligned} \lim_{r\rightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}-0} K(r) &= \lim_{r\rightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}-0} \left\{ 2\cdot\int_0^r \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-2x^2}} \right\} \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2}}{2-\sin^2\theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sin\theta} + \frac{1}{\sqrt{2}-\sin\theta} \right) d\theta \\ &= I+J \\ &= \left(2\alpha-\frac{\pi}{2} \right) + \left(\frac{3}{2}\pi-2\alpha \right) \\ &= \pi \end{aligned}$$

となる。

【解答】

〔1〕	ア			
	$\alpha z+\beta$			
〔2〕	イ	ウ		
	$\left (\alpha-1) i+\beta\right \alpha ^{n-1}$	$\frac{\left (\alpha-1) i+\beta\right }{1- \alpha }$		
〔3〕	エ	オ	カ	
	$\gamma z+(1-\gamma) \delta$	α	$\frac{\beta}{1-\alpha}$	
〔4〕	キ	ク	ケ	コ
	$\frac{1}{3} \sin 2 \theta$	$\frac{2}{9} \sin \theta\left(2 \sqrt{3}-3 \cos \theta\right)$	$\frac{2}{9} \sin \theta\left(2 \sqrt{3}-3 \cos \theta\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$	$\frac{1}{4} \sin \theta\left(2 \sqrt{3}-3 \cos \theta\right)$

【解説】

〔1〕

題意より求める点を ω とおくと、

$$\omega=\alpha z+\beta$$

である。

〔2〕

題意より、 z_n は z_{n-1} を原点中心に $\arg \alpha$ だけ回転し、原点からの距離を $|\alpha|$ 倍、 β だけ平行移動した点であるので、

$$z_n=\alpha z_{n-1}+\beta$$

である。よって、

$$\begin{aligned} a_{n+1} &=\left|z_{n+1}-z_n\right| \\ &=\left|(\alpha z_n+\beta)-\left(\alpha z_{n-1}+\beta\right)\right| \\ &=|\alpha|\left|z_n-z_{n-1}\right| \\ &=|\alpha| a_n \end{aligned}$$

と表すことができる。また、

$$\begin{aligned} a_1 &=\left|z_1-z_0\right| \\ &=\left|\alpha z_0+\beta-z_0\right| \\ &=\left|(\alpha-1) i+\beta\right| \end{aligned}$$

であるので、数列 a_n は初項 $\left|(\alpha-1) i+\beta\right|$ 、公比 $|\alpha|$ の等比数列である。よって、

$$a_n=\left|(\alpha-1) i+\beta\right||\alpha|^{n-1}$$

となる。以上より $|\alpha|<1$ であることに注意して、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &=\frac{a_1}{1-|\alpha|} \\ &=\frac{\left|(\alpha-1) i+\beta\right|}{1-|\alpha|} \end{aligned}$$

となる。

〔3〕

題意の点を ρ とおくと、

$$\rho-\delta=\gamma(z-\delta) \Leftrightarrow \rho=\gamma z+(1-\gamma) \delta$$

と表すことができる。よって、任意の複素数 z について $\alpha z+\beta=\gamma z+(1-\gamma) \delta$ が成立する条件は、

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha=\gamma \\ \beta=(1-\gamma) \delta \end{array}\right.$$

であるので、これらを解いて、

$$\left\{\begin{array}{l} \gamma=\alpha \\ \delta=\frac{\beta}{1-\alpha} \end{array}\right.$$

となる。

〔4〕

題意より $\frac{\beta}{1-\alpha}=1 \Leftrightarrow \beta=1-\alpha$ であり、 $z_0=i$ であるので、

$$\begin{aligned} z_2 &=\alpha z_1+\beta \\ &=\alpha\left(\alpha z_0+\beta\right)+\beta \\ &=\alpha^2 i+\beta(1+\alpha) \\ &=\alpha^2(i-1)+1 \end{aligned}$$

と表すことができる。よって $z_2-1=\alpha^2(i-1)$ であるので、 $\overrightarrow{\mathrm{BP}_2}$ は $\overrightarrow{\mathrm{BP}_0}$ を 2θ 回転して大きさを

$\frac{1}{3}$ 倍したベクトルである。ここで $|i-1|=\sqrt{2}$ であることに注意して $\triangle \mathrm{P}_0 \mathrm{BP}_2$ の面積は、

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \sin 2 \theta=\frac{1}{3} \sin 2 \theta$$

となる。また、

$$\left\{\begin{array}{l} z_1-1=\alpha(i-1) \\ z_2-1=\alpha\left(z_1-1\right) \end{array}\right.$$

であるので、 $\overrightarrow{\mathrm{BP}_1}$ は $\overrightarrow{\mathrm{BP}_0}$ を θ 回転して $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 倍したベクトルであり、 $\overrightarrow{\mathrm{BP}_2}$ は $\overrightarrow{\mathrm{BP}_1}$ を θ 回転して

$\frac{1}{\sqrt{3}}$ 倍したベクトルである。よって $\triangle \mathrm{P}_0 \mathrm{P}_1 \mathrm{P}_2$ の面積は、

$$\begin{aligned} S_1 &=\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \sin \theta+\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \sin \theta-\frac{1}{3} \sin 2 \theta \\ &=\frac{4}{3 \sqrt{3}} \sin \theta-\frac{2}{3} \sin \theta \cos \theta \\ &=\frac{2}{9} \sin \theta\left(2 \sqrt{3}-3 \cos \theta\right) \end{aligned}$$

となる。さらに $\triangle \mathrm{P}_n \mathrm{P}_{n+1} \mathrm{P}_{n+2}$ は $\triangle \mathrm{P}_{n-1} \mathrm{P}_n \mathrm{P}_{n+1}$ を点 B 中心に θ 回転して $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 倍したものであるので、

$$S_{n+1}=\frac{1}{3} S_n$$

$$\begin{aligned} S_n &=S_1\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ &=\frac{2}{9} \sin \theta\left(2 \sqrt{3}-3 \cos \theta\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

である。以上より $\sum_{n=1}^{\infty} S_{2 n-1}$ は初項 S_1 、公比 $\frac{1}{9}$ の無限等比級数であるので、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} S_{2 n-1} &=\frac{S_1}{1-\frac{1}{9}} \\ &=\frac{1}{4} \sin \theta\left(2 \sqrt{3}-3 \cos \theta\right) \end{aligned}$$

となる。