

【解答】

ア	-4	イ	-2	ウ	2
---	----	---	----	---	---

エ	0	オ	1	カ	4	キ	$\frac{32}{7}$
---	---	---	---	---	---	---	----------------

ク	$3\sqrt{3}\sin\theta$	ケ	$\cos\theta$	コ	$6\cos\theta-3$	サ	$\cos\theta$
---	-----------------------	---	--------------	---	-----------------	---	--------------

シ	9
---	---

ス	$\frac{2}{63}$	セ	$\frac{1}{40}$	ソ	$\frac{2}{k(k+2)}$
---	----------------	---	----------------	---	--------------------

タ	$\frac{58}{45}$	チ	$\frac{n(3n+5)}{2(n+1)(n+2)}$
---	-----------------	---	-------------------------------

【解説】

[1]

与式を変形すると、

$$\begin{aligned}y &= \begin{cases} -(x^2+4x)+2x+8 & (x\leq -4, 0\leq x) \\ -(x^2-4x)+2x+8 & (-4<x<0) \end{cases} \\ &= \begin{cases} -x^2-2x+8 & (x\leq -4, 0\leq x) \\ x^2+6x+8 & (-4<x<0) \end{cases}\end{aligned}$$

となる。 $x\leq -4, 0\leq x$ のとき、 $y=-x^2-2x+8$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標は

$$\begin{aligned}-x^2-2x+8 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+4)(x-2) &= 0 \\ \therefore x &= -4, 2\end{aligned}$$

となる。また、 $0<x<4$ のとき、 $y=x^2+6x+8$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標は

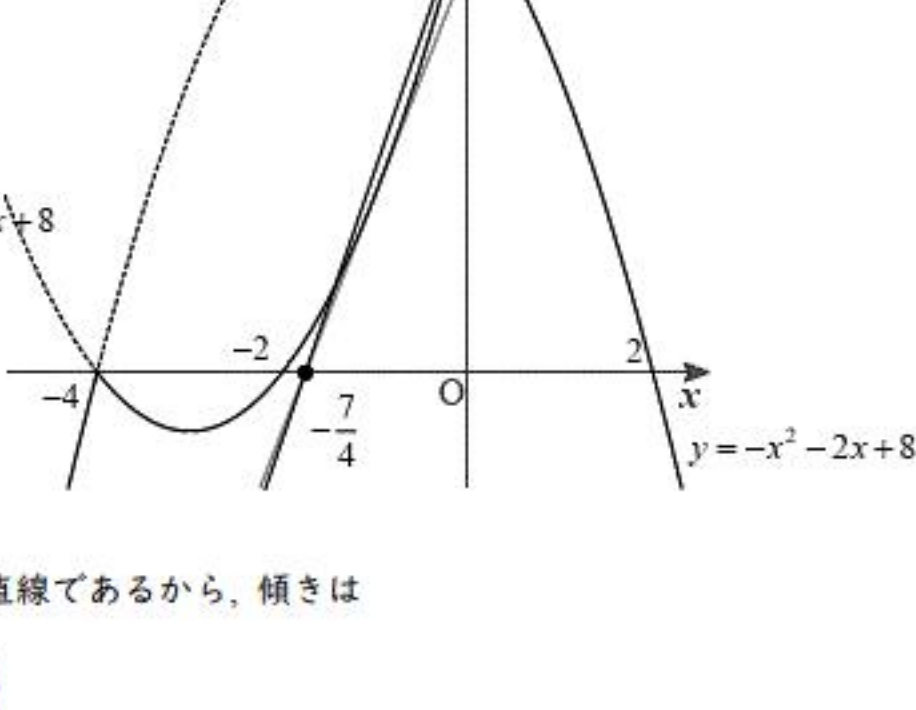
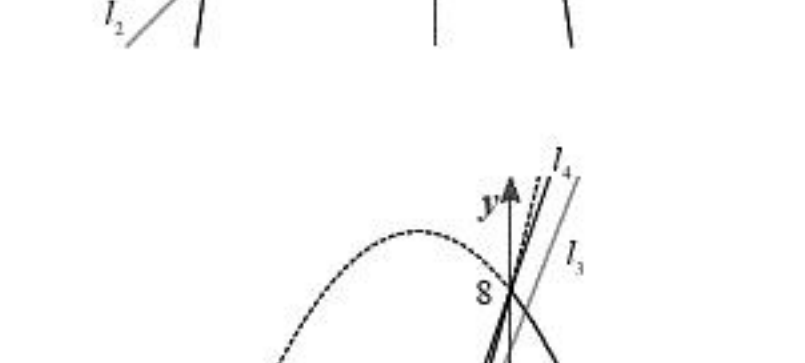
$$\begin{aligned}x^2+6x+8 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+2)(x-4) &= 0 \\ \therefore x &= -2\end{aligned}$$

となる。よって、関数①のグラフと x 軸との共有点の x 座標は、 $-4, -2, 2$ である。

直線 $y=m\left(x+\frac{7}{4}\right)$ は点 $\left(-\frac{7}{4}, 0\right)$ を通り、傾き m の直線である。よって、関数①のグラフと直

線 $y=m\left(x+\frac{7}{4}\right)$ とが 4 つの共有点をもつのは、以下のグラフより、直線 $y=m\left(x+\frac{7}{4}\right)$ が l_1 と l_2

の間にあるとき、または、 l_3 と l_4 の間にあるときである。ここで、



l_1 は点 $(-4, 0)$ を通る直線であるから、傾きは

$$\begin{aligned}0 &= m\left(-4+\frac{7}{4}\right) \\ \therefore m &= 0\end{aligned}$$

となる。 l_3 は点 $(0, 8)$ を通る直線であるから、傾きは

$$\begin{aligned}8 &= m\left(0+\frac{7}{4}\right) \\ \therefore m &= \frac{32}{7}\end{aligned}$$

となる。 l_2 および l_4 は $y=x^2+6x+8$ と接する直線である。 $y=x^2+6x+8$ と $y=m\left(x+\frac{7}{4}\right)$ が接するとき、

$$\begin{aligned}x^2+6x+8 &= m\left(x+\frac{7}{4}\right) \\ \Leftrightarrow x^2+(6-m)x+8-\frac{7}{4}m &= 0\end{aligned}$$

の判別式を D として、

$$\begin{aligned}D &= 0 \\ \Leftrightarrow (6-m)^2-4\left(8-\frac{7}{4}m\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow m^2-5m+4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (m-1)(m-4) &= 0 \\ \therefore m &= 1, 4\end{aligned}$$

となる。 $m=1$ のとき、接点の x 座標は $x=\frac{m-6}{2}=-\frac{5}{2}$ となる。また、 $m=4$ のとき、接点の x

座標は $x=\frac{m-6}{2}=-1$ となる。ここで、上のグラフより、関数①のグラフと l_2 の接点の x 座標

は -2 より小さくなり、また関数①のグラフと l_4 の接点の x 座標は -2 より大きくなる。したがって、 l_2 の傾きは $m=1$ 、 l_3 の傾きは $m=4$ となる。以上より、関数①のグラフと直線

$y=m\left(x+\frac{7}{4}\right)$ とが 4 つの共有点をもつのは $0<m<1, 4<m<\frac{32}{7}$ のときである。

[2]

直線 AB 上の点 (x, y, z) は

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= \overline{OA}+t\overline{AB} \\ &= (0, 0, 6)+t\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta, \frac{4}{3}\cos\theta-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\cos\theta-\frac{8}{3}\right) \\ &= \left(\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right)t, \left(\frac{4}{3}\cos\theta-\frac{2}{3}\right)t, \left(\frac{4}{3}\cos\theta-\frac{8}{3}\right)t+6\right)\end{aligned}$$

と表される。直線 AB が xy 平面と交わるとき z 座標は 0 となるから、

$$\begin{aligned}\left(\frac{4}{3}\cos\theta-\frac{8}{3}\right)t+6 &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= -\frac{6}{\frac{4}{3}\cos\theta-\frac{8}{3}} \\ &= \frac{9}{4-2\cos\theta}\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}p &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta\cdot\frac{9}{4-2\cos\theta} \\ &= \frac{3\sqrt{3}\sin\theta}{2-\cos\theta} \\ q &= \left(\frac{4}{3}\cos\theta-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{9}{4-2\cos\theta} \\ &= \frac{6\cos\theta-3}{2-\cos\theta}\end{aligned}$$

となる。これから、

$$\begin{aligned}p^2+q^2 &= \left(\frac{3\sqrt{3}\sin\theta}{2-\cos\theta}\right)^2+\left(\frac{6\cos\theta-3}{2-\cos\theta}\right)^2 \\ &= \frac{27\sin^2\theta+36\cos^2\theta-36\cos\theta+9}{(2-\cos\theta)^2} \\ &= \frac{27(1-\cos^2\theta)+36\cos^2\theta-36\cos\theta+9}{(2-\cos\theta)^2} \\ &= \frac{9(2-\cos\theta)^2}{(2-\cos\theta)^2}\end{aligned}$$

となる。ここで、 $0\leq\theta<2\pi$ から $-1\leq\cos\theta\leq 1$ となるので、

$$\begin{aligned}1 &\leq 2-\cos\theta\leq 3 \\ \therefore (2-\cos\theta)^2 &> 0\end{aligned}$$

となる。これより、 $p^2+q^2=\frac{9(2-\cos\theta)^2}{(2-\cos\theta)^2}$ について、

$$p^2+q^2=9$$

のように式変形することができる。

[3] (a)

数列 $\{a_n\}$ の分子の数字を 2 に合わせると、

$$a_1=\frac{2}{3}, a_2=\frac{2}{8}, a_3=\frac{2}{15}, a_4=\frac{2}{24}, a_5=\frac{2}{35}, a_6=\frac{2}{48}, \dots\dots$$

となる。ここで、分母を取り出して数列 $\{b_n\}$ とすると、

$$b_1=3, b_2=8, b_3=15, b_4=24, b_5=35, b_6=48, \dots\dots$$

となる。さらに、数列 $\{b_n\}$ の階差数列を $\{c_n\}$ とすると、

$$c_1=5, c_2=7, c_3=9, c_4=11, c_5=13, \dots$$

となる。これより、数列 $\{c_n\}$ は初項 5、公差 2 の等差数列である。よって、

$$\begin{aligned}b_7 &= b_6+c_6 \\ &= 48+(13+2) \\ &= 63\end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned}a_7 &= \frac{2}{b_7} \\ &= \frac{2}{63}\end{aligned}$$

と計算できる。

(b)

(a)と同様にして、

$$\begin{aligned}b_8 &= b_7+c_7 \\ &= 63+(15+2) \\ &= 80\end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned}a_8 &= \frac{2}{b_8} \\ &= \frac{1}{40}\end{aligned}$$

と計算できる。

(c)

(a)より、数列 $\{b_n\}$ の階差数列 $\{c_n\}$ の一般項 c_n は

$$\begin{aligned}c_n &= 5+2(n-1) \\ &= 2n+3\end{aligned}$$

である。よって、 $n\geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned}b_n &= b_1+\sum_{k=1}^{n-1}c_k \\ &= 3+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+3) \\ &= 3+\frac{1}{2}\{5+2(n-1)+3\}(n-1) \\ &= 3+\frac{1}{2}(2n+6)(n-1) \\ &= n^2+2n \\ &= n(n+2)\end{aligned}$$

となる。 $b_1=3$ より、これは $n=1$ でも成立する。よって、

$$\begin{aligned}a_k &= \frac{2}{b_k} \\ &= \frac{2}{k(k+2)}\end{aligned}$$

となる。

(d)

a_k について部分分数分解すると、

$$\begin{aligned}a_k &= \frac{2}{k(k+2)} \\ &= \frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\end{aligned}$$

となる。これより、

$$\begin{aligned}S_8 &= \sum_{k=1}^8a_k \\ &= \sum_{k=1}^8\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\dots+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right) \\ &= \frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{9}-\frac{1}{10} \\ &= \frac{58}{45}\end{aligned}$$

と計算できる。

(e)

(d)と同様に式変形することで、

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^na_k \\ &= \sum_{k=1}^n\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right) \\ &= \frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2} \\ &= \frac{n(3n+5)}{2(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

と計算できる。

II

【解答】

ア	2	イ	0	ウ	4	エ	0
オ	18	カ	0	キ	6	ク	$4+\sqrt{p-2}$
ケ	6	コ	$4+\sqrt{p-2}$				

【解説】

[1]

$h(x)=g(x)-f(x)$ より、

$$\begin{aligned} h(x) &= px - \left(\frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 18x \right) \\ &= -\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 + (p-18)x \end{aligned}$$

となる。よって、

$$h'(x) = -x^2 + 8x + p - 18$$

となる。 $h'(x)=0$ の判別式を D とすると、 $h'(x)=0$ が実数解をもたないのは、 $p(>0)$ について、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &< 0 \\ \Leftrightarrow 4^2 + (p-18) &< 0 \\ \therefore 0 &< p < 2 \end{aligned}$$

のような関係式が成り立つときである。このとき、 $h(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...
$h'(x)$		-
$h(x)$		$\searrow$

よって、 $h(x)$ が最大となるのは、 $x=0$ のときであるから、A社の製造量 x は0となる。

[2]

(1)より、 $h'(x)=0$ が重解をもつのは、判別式 $D=0 \Leftrightarrow p=2$ のときである。重解を求めると、

$$\begin{aligned} h'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow -x^2 + 8x - 16 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-4)^2 &= 0 \\ \therefore x &= 4 \end{aligned}$$

となる。このとき、 $h(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...	4	...
$h'(x)$		-	0	-
$h(x)$		$\searrow$		$\searrow$

よって、 $h(x)$ が最大となるのは、 $x=0$ のときであるから、A社の製造量 x は0となる。

[3]

$h'(x)=0$ が異なる2つの正の実数解 $\alpha, \beta(0<\alpha<\beta)$ をもつのは、

$$\begin{cases} h'(0) < 0 \\ \text{軸: } x=4 > 0 \\ \frac{D}{4} > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2 < p < 18$$

のときである。また、 $\alpha=4-\sqrt{p-2}, \beta=4+\sqrt{p-2}$ である。このとき、 $h(x)$ の増減表は以下

のようになる。

x	0	...	α	...	β	...
$h'(x)$		-	0	+	0	-
$h(x)$	$h(0)$	$\searrow$	$h(\alpha)$	$\nearrow$	$h(\beta)$	$\searrow$

ここで、

$$h(x) = h'(x) \left(\frac{1}{3}x - \frac{4}{3} \right) + \left(\frac{2}{3}p - \frac{4}{3} \right)x + \frac{4}{3}p - 24$$

と計算でき、 $h'(\beta)=0$ であるから、

$$\begin{aligned} h(\beta) &= \left(\frac{2}{3}p - \frac{4}{3} \right)\beta + \frac{4}{3}p - 24 \\ &= \left(\frac{2}{3}p - \frac{4}{3} \right)(4 + \sqrt{p-2}) + \frac{4}{3}p - 24 \\ &= 4p + \frac{2p\sqrt{p-2}}{3} - \frac{4\sqrt{p-2}}{3} - \frac{88}{3} \\ \therefore h(\beta) &= \frac{2}{3} \left\{ (p-2)^{\frac{3}{2}} - (44-6p) \right\} \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。

(a)

$h(0)>h(\beta)$ のとき、 $h(x)$ が最大となるのは、 $x=0$ のときであるから、A社の製造量 x は0となる。ここで、①より、

$$\begin{aligned} h(0) &> h(\beta) \\ \Leftrightarrow 0 &> \frac{2}{3} \left\{ (p-2)^{\frac{3}{2}} - (44-6p) \right\} \\ \Leftrightarrow (p-2)^{\frac{3}{2}} &< 44-6p \end{aligned}$$

となる。 $2<p<18$ より、左辺は正であるから、 $44-6p>0 \Leftrightarrow p<\frac{22}{3}$ が必要である。 p がこ

れを満たすとき、両辺を2乗して、

$$\begin{aligned} (p-2)^3 &< (44-6p)^2 \\ \Leftrightarrow p^3 - 42p^2 + 540p - 1944 &< 0 \\ \Leftrightarrow (p-6)(p-18)^2 &< 0 \\ \therefore p &< 6 \end{aligned}$$

となる。これと $2<p<18, p<\frac{22}{3}$ とを合わせて、 p の範囲は $2<p<6$ となる。

(b)

$h(0)<h(\beta)$ のとき、 $h(x)$ が最大となるのは、 $x=\beta$ のときであるから、A社の製造量 x は $\beta=4+\sqrt{p-2}$ となる。このとき、(a)と同様にして、

$$\begin{aligned} h(0) &< h(\beta) \\ \Leftrightarrow (p-2)^{\frac{3}{2}} &> 44-6p \end{aligned}$$

となる。両辺を2乗して、

$$\begin{aligned} (p-2)^3 &> (44-6p)^2 \\ \Leftrightarrow p^3 - 42p^2 + 540p - 1944 &> 0 \\ \Leftrightarrow (p-6)(p-18)^2 &> 0 \\ \therefore 6 &< p < 18, 18 < p \end{aligned}$$

となる。これと、 $2<p<18$ とを合わせて、 p の範囲は $6<p<18$ となる。

(c)

$h(0)=h(\beta)$ のとき、(a)、(b)と同様にして、 $p=6$ となる。このとき、 $h(x)$ が最大となるのは、 $x=0, \beta$ つまり、 $x=0, 6$ のときであるから、A社の製造量 x は0, あるいは6となる。

[4]

$p \geq 18$ のとき、 $h'(x)=0$ は正の実数解と0以下の実数解を1つずつもつ。このとき、正の実数解を γ とすると、 $h(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...	γ	...
$h'(x)$		+	0	-
$h(x)$		$\nearrow$		$\searrow$

γ は $h'(x)=0$ の実数解のうち大きい方であるから、 $\gamma=4+\sqrt{p-2}$ である。よって、 $h(x)$ が

最大となるのは、 $x=\gamma$ のときであるから、A社の製造量 x は $\gamma=4+\sqrt{p-2}$ となる。

Ⅲ

[1]

円 C の中心の x 座標が 4 、半径が 2 であることから、円 C の方程式は

$$(x-4)^2 + (y-y_0)^2 = 4$$

とおける。ここで、円 C は点 $(6, 1)$ を通るから、

$$\begin{aligned} (6-4)^2 + (1-y_0)^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow y_0^2 - 2y_0 + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (y_0 - 1)^2 &= 0 \\ \therefore y_0 &= 1 \end{aligned}$$

と求められる。よって、円 C の方程式は

$$\begin{aligned} (x-4)^2 + (y-1)^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 8x - 2y + 13 &= 0 \end{aligned}$$

となるから、 $a = -8, b = -2, c = 13$ となる。

(答) $a = -8, b = -2, c = 13$

[2] (a)

直線 l は点 $P(-2, 0)$ を通り、傾きが $\frac{1}{2}$ の直線であるから、その方程式は、

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}(x - (-2)) \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{2}x + 1 \end{aligned}$$

となる。ここで、点 S の座標を (p, q) とおく。点 $S(p, q)$ と円 C の中心 $(4, 1)$ の中点

$\left(\frac{p+4}{2}, \frac{q+1}{2}\right)$ は直線 l 上の点となるから、

$$\begin{aligned} \frac{q+1}{2} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{p+4}{2} + 1 \\ \Leftrightarrow p - 2q + 6 &= 0 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

が成立する。また、点 $S(p, q)$ と円 C の中心 $(4, 1)$ を結ぶ直線は、直線 l と垂直となるから、

$$\begin{aligned} \frac{q-1}{p-4} &= -2 \\ \Leftrightarrow 2p + q - 9 &= 0 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

が成立する。①、②を連立して (p, q) を求めると、

$$(p, q) = \left(\frac{12}{5}, \frac{21}{5}\right)$$

となるから、点 S の座標は $\left(\frac{12}{5}, \frac{21}{5}\right)$ である。

(答) $\left(\frac{12}{5}, \frac{21}{5}\right)$

(b)

円 C の中心 $(4, 1)$ と直線 $l: x - 2y + 2 = 0$ の距離は、点と直線の距離の公式より、

$$\frac{|4 - 2 \cdot 1 + 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

となり、 $\frac{4}{\sqrt{5}} < 2$ であるから、円 C と直線 l は異なる 2 点 Q, R で交わる。円 C と直線 l の共有

点を通る円は、実数 k を用いて、

$$(x-4)^2 + (y-1)^2 - 4 + k(x-2y+2) = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

と表される。これが点 $S\left(\frac{12}{5}, \frac{21}{5}\right)$ を通るから、

$$\begin{aligned} \left(\frac{12}{5} - 4\right)^2 + \left(\frac{21}{5} - 1\right)^2 - 4 + k\left(\frac{12}{5} - 2 \cdot \frac{21}{5} + 2\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{64}{25} + \frac{256}{25} - 4 - 4k &= 0 \\ \Leftrightarrow k &= \frac{11}{5} \end{aligned}$$

となる。これを③に代入して、

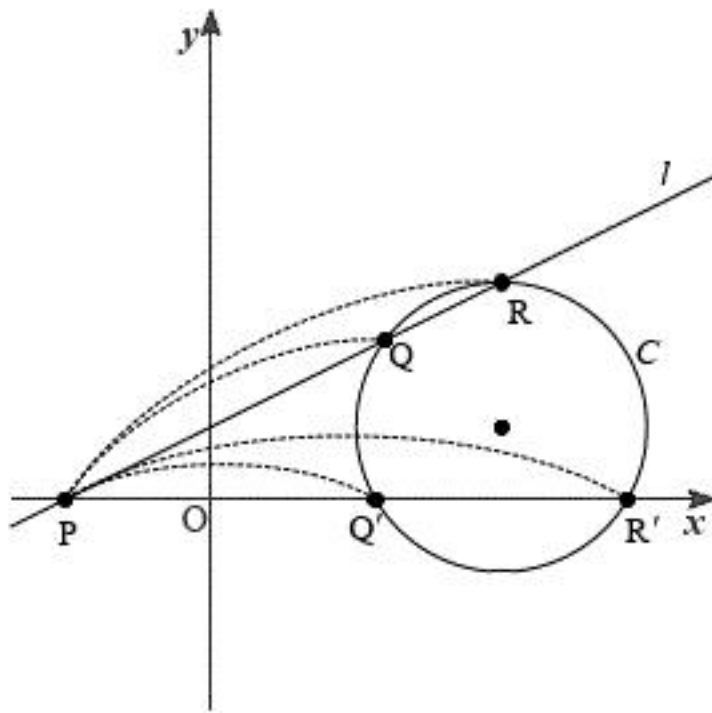
$$\begin{aligned} (x-4)^2 + (y-1)^2 - 4 + \frac{11}{5}(x-2y+2) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{29}{5}x - \frac{32}{5}y + \frac{87}{5} &= 0 \end{aligned}$$

となる。

(答) $x^2 + y^2 - \frac{29}{5}x - \frac{32}{5}y + \frac{87}{5} = 0$

(c)

円 C と直線 l を図示すると以下のようになる。



円 C と x 軸の 2 つの交点を Q', R' とすると、方べきの定理より、

$$PQ \cdot PR = PQ' \cdot PR'$$

が成立する。 Q', R' の x 座標を α, β とすると、 $P(-2, 0)$ より、

$$\begin{aligned} PQ' \cdot PR' &= (\alpha + 2)(\beta + 2) \\ \Leftrightarrow PQ' \cdot PR' &= \alpha\beta + 2(\alpha + \beta) + 4 \quad \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

となる。 α, β は

$$\begin{aligned} (x-4)^2 + (0-1)^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow x^2 - 8x + 13 &= 0 \end{aligned}$$

の実数解となる。よって、解と係数の関係より、 $\alpha + \beta = 8, \alpha\beta = 13$ が成立するから、④に代入して、

$$\begin{aligned} PQ' \cdot PR' &= 13 + 2 \cdot 8 + 4 \\ &= 33 \end{aligned}$$

となる。よって、 $PQ \cdot PR = 33$ となる。

(答) 33