

【解答】

ア	$5k^4+10k^3+10k^2+5k+1$				イ	10	ウ	10	エ	5
オ	$2n+1$			カ	$3n^2+3n-1$					
キ	$\frac{2}{3}$	ク	$\frac{1}{3}$	ケ	$\frac{6}{7}$	コ	$\frac{3}{7}$			
サ	7	シ	$\frac{2}{5}$	ス	60					
セ	$\frac{37}{42}$	ソ	$\frac{34}{55}$	タ	$\frac{16}{33}$	チ	$\frac{82}{165}$			

【解説】

[1]

k についての恒等式

$$(k+1)^5-k^5=5k^4+10k^3+10k^2+5k+1$$

に $k=1, 2, 3, \dots, n$ を代入して辺々を加えると

$$\begin{aligned} & \left\{ (n+1)^5 - n^5 \right\} + \left\{ n^5 - (n-1)^5 \right\} + \dots + \left\{ 2^5 - 1^5 \right\} = 5 \sum_{k=1}^n k^4 + 10 \sum_{k=1}^n k^3 + 10 \sum_{k=1}^n k^2 + 5 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \\ & \Leftrightarrow (n+1)^5 - 1 = 5 \sum_{k=1}^n k^4 + 10 \sum_{k=1}^n k^3 + 10 \sum_{k=1}^n k^2 + 5 \sum_{k=1}^n k + n \\ & \therefore 5 \sum_{k=1}^n k^4 = (n+1)^5 - n - 1 - 10 \sum_{k=1}^n k^3 - 10 \sum_{k=1}^n k^2 - 5 \sum_{k=1}^n k \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1), \quad \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2} n(n+1)$$

を用いて右边を計算すると

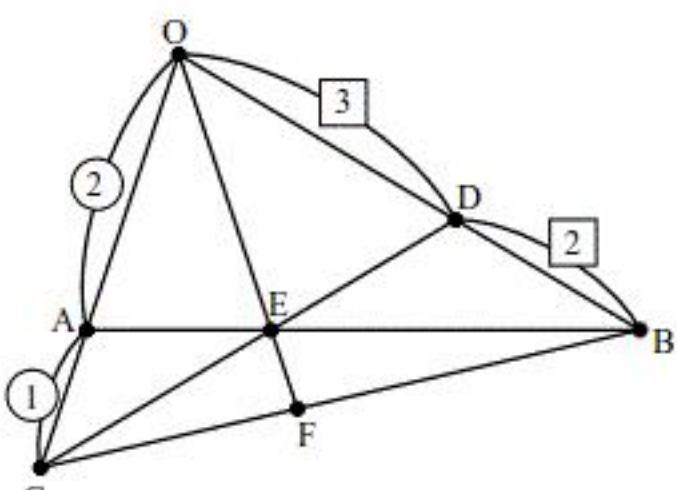
$$\begin{aligned} 5 \sum_{k=1}^n k^4 &= (n+1)^5 - (n+1) - 10 \cdot \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2 - 10 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - 5 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) \\ &= (n+1) \left\{ (n+1)^4 - 1 - \frac{5}{2} n^2(n+1) - \frac{5}{3} n(2n+1) - \frac{5}{2} n \right\} \\ &= (n+1) \left(n^4 + \frac{3}{2} n^3 + \frac{1}{6} n^2 - \frac{1}{6} n \right) \\ &= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1) \end{aligned}$$

となり、辺々を5で割ると

$$\sum_{k=1}^n k^4 = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

を得る。

[2]



各点の位置は上図のようになり、 $\overline{OC} = \frac{3}{2} \overline{OA}$, $\overline{OD} = \frac{3}{5} \overline{OB}$ が成り立つ。 $\triangle OAB$ と直線 CD に

メネラウスの定理を用いて

$$\begin{aligned} \frac{EB}{AE} \cdot \frac{DO}{BD} \cdot \frac{CA}{OC} &= 1 \\ \therefore \frac{EB}{AE} &= \frac{BD}{DO} \cdot \frac{OC}{CA} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{1} = 2 \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって点 E は辺 AB を $1:2$ に内分しているので

$$\overline{OE} = \frac{2}{3} \overline{OA} + \frac{1}{3} \overline{OB}$$

である。また、 $\triangle OBC$ と点 E にチェバの定理を用いると

$$\begin{aligned} \frac{FB}{CF} \cdot \frac{DO}{BD} \cdot \frac{AC}{OA} &= 1 \\ \therefore \frac{FB}{CF} &= \frac{BD}{DO} \cdot \frac{OA}{AC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、点 F は辺 CB を $3:4$ に内分しているため

$$\overline{OF} = \frac{4}{7} \overline{OC} + \frac{3}{7} \overline{OB} = \frac{6}{7} \overline{OA} + \frac{3}{7} \overline{OB}$$

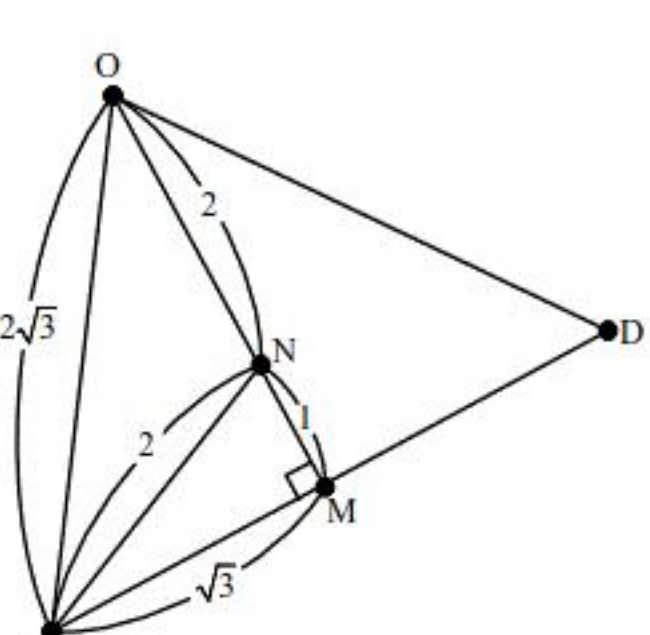
である。以上より、

$$\begin{aligned} \triangle OAB &= 2 \cdot \triangle ABC \\ &= 2 \cdot \frac{3}{2} \triangle BCE \\ &= 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{3} \triangle CEF \\ &= 7 \cdot \triangle CEF \end{aligned}$$

となるため、 $\triangle OAB$ の面積は $\triangle CEF$ の面積の 7 倍である。 $\overline{OM}$, $\overline{CD}$ が垂直であるとき、 $\triangle OCD$ は $OC=OD$ である二等辺三角形となるから

$$\begin{aligned} \left| \frac{3}{2} \overline{OA} \right| &= \left| \frac{3}{5} \overline{OB} \right| \\ \therefore \left| \overline{OA} \right| &= \frac{2}{5} \left| \overline{OB} \right| \end{aligned}$$

であり、さらに $\left| \overline{ON} \right| = \left| \overline{NC} \right|$ が成り立つとき各辺の長さの比は下図のようになる。



$\triangle OCM$ の辺の比が $CM:OC:OM=1:2:\sqrt{3}$ となるため、 $\angle COM=30^\circ$ である。したがって、 $\angle AOB=2 \cdot \angle COM=60^\circ$ である。

[3] (a)

9個の玉すべてを区別して考えるとき、3個の玉の取り出し方は全部で ${}_9C_3=84$ (通り) であり、同様に確からしい。取り出した玉がすべて赤玉であるとき、玉の取り出し方は ${}_3C_3=10$ (通り) であるため、少なくとも1個は白玉が出る確率は

$$1 - \frac{10}{84} = \frac{37}{42}$$

である。

(b)

11個の玉すべてを区別して考えるとき、4個の玉の取り出し方は全部で ${}_{11}C_4=330$ (通り) であり、同様に確からしい。取り出した玉がすべて青玉以外であるとき、赤玉と白玉は合わせて9個であることから、玉の取り出し方は ${}_9C_4=126$ (通り) である。したがって、少なくとも1個は青玉が出る確率は

$$1 - \frac{126}{330} = \frac{34}{55}$$

である。

(c)

赤、白、青3色すべての色の玉が出るとき、出た玉の色の数の組み合わせとしてありうるのは(赤、白、青)=(2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2) である。

[1] 赤玉を2個、白玉を1個、青玉を1個取り出すとき

$$\begin{aligned} & \text{玉の取り出し方は,} \\ & {}_5C_2 \cdot {}_4C_1 \cdot {}_2C_1 = 80 \text{ (通り)} \end{aligned}$$

である。

[2] 赤玉を1個、白玉を2個、青玉を1個取り出すとき

$$\begin{aligned} & \text{玉の取り出し方は,} \\ & {}_5C_1 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_1 = 60 \text{ (通り)} \end{aligned}$$

である。

[3] 赤玉を1個、白玉を1個、青玉を2個取り出すとき

$$\begin{aligned} & \text{玉の取り出し方は,} \\ & {}_5C_1 \cdot {}_4C_1 \cdot {}_2C_2 = 20 \text{ (通り)} \end{aligned}$$

である。

[1], [2], [3] より、3色すべての色の玉が出る確率は、

$$\frac{80+60+20}{330} = \frac{16}{33}$$

である。

(d)

出た玉の色が1色となる玉の取り出し方は、玉の色が赤の場合と白の場合をそれぞれ考えて、

$${}_5C_4 + {}_4C_4 = 6 \text{ (通り)} \text{ であるため、その確率は } \frac{6}{330} = \frac{1}{55} \text{ である。また、出た玉の色が3色であ}$$

る確率は(c)より $\frac{16}{33}$ である。したがって、出た玉の色が2色である確率は

$$1 - \frac{1}{55} - \frac{16}{33} = \frac{82}{165}$$

である。

【解答】

ア	$\frac{8\sqrt{299}}{299}$	イ	$\frac{4}{25}x^2 - \frac{8}{5}x + \frac{66}{5}$	ウ	$\frac{4}{25}y^2 - \frac{8}{5}y + \frac{46}{5}$	
エ	$2xy - 10x - 10y + 90$		オ	$2x^2 - 20x + 165$		
カ	$2y^2 - 20y + 115$		キ	$\frac{8\sqrt{299}}{299}$	ク	4
ケ	10	コ	1	サ	$\frac{6\sqrt{759}}{253}$	

【解説】

[1]

数学、英語の得点の平均値はそれぞれ、

$$\frac{1}{4}(1+3+6+10)=5$$

$$\frac{1}{4}(3+7+2+8)=5$$

である。よって、数学、英語の得点の分散はそれぞれ、

$$\frac{1}{4}\{(1-5)^2+(3-5)^2+(6-5)^2+(10-5)^2\}=\frac{23}{2}$$

$$\frac{1}{4}\{(3-5)^2+(7-5)^2+(2-5)^2+(8-5)^2\}=\frac{13}{2}$$

であり、数学と英語の得点の共分散は、

$$\frac{1}{4}\{(1-5)\cdot(3-5)+(3-5)\cdot(7-5)+(6-5)\cdot(2-5)+(10-5)\cdot(8-5)\}=4$$

となる。したがって、数学の得点と英語の得点の相関係数は、

$$\frac{4}{\sqrt{\frac{23}{2}\cdot\frac{13}{2}}}=\frac{8\sqrt{299}}{299}$$

となる。

[2]

Eを加えた5名の数学、英語の得点の平均値はそれぞれ、

$$\frac{1}{5}(1+3+6+10+x)=\frac{1}{5}x+4$$

$$\frac{1}{5}(3+7+2+8+y)=\frac{1}{5}y+4$$

である。また、5名の数学、英語の得点の2乗の平均値はそれぞれ、

$$\frac{1}{5}(1^2+3^2+6^2+10^2+x^2)=\frac{1}{5}x^2+\frac{146}{5}$$

$$\frac{1}{5}(3^2+7^2+2^2+8^2+y^2)=\frac{1}{5}y^2+\frac{126}{5}$$

であるため、5名の数学、英語の得点の分散はそれぞれ、

$$\left(\frac{1}{5}x^2+\frac{146}{5}\right)-\left(\frac{1}{5}x+4\right)^2=\frac{2}{25}(2x^2-20x+165)$$

$$\left(\frac{1}{5}y^2+\frac{126}{5}\right)-\left(\frac{1}{5}y+4\right)^2=\frac{2}{25}(2y^2-20y+115)$$

であり、数学と英語の得点の共分散は、

$$\frac{1}{5}(1\cdot 3+3\cdot 7+6\cdot 2+10\cdot 8+xy)-\left(\frac{1}{5}x+4\right)\left(\frac{1}{5}y+4\right)=\frac{4}{25}(xy-5x-5y+45)$$

となる。したがって、数学の得点と英語の得点の相関係数 r は、

$$\begin{aligned} r &= \frac{\frac{4}{25}(xy-5x-5y+45)}{\sqrt{\frac{2}{25}(2x^2-20x+165)}\cdot\sqrt{\frac{2}{25}(2y^2-20y+115)}} \\ &= \frac{2xy-10x-10y+90}{\sqrt{2x^2-20x+165}\cdot\sqrt{2y^2-20y+115}} \end{aligned}$$

となる。ここで、 x がA～Dの4名の生徒の数学の平均値に等しく、 y がA～Dの4名の生徒の英語の平均値に等しいとき、 $x=y=5$ であり、相関係数 r は、

$$\begin{aligned} r &= \frac{2\cdot 5\cdot 5-10\cdot 5-10\cdot 5+90}{\sqrt{2\cdot 5^2-20\cdot 5+165}\cdot\sqrt{2\cdot 5^2-20\cdot 5+115}} \\ &= \frac{40}{\sqrt{115}\cdot\sqrt{65}} \\ &= \frac{8\sqrt{299}}{299} \end{aligned}$$

となる。また、相関係数 r の値が0となるとき、

$$2xy-10x-10y+90=0$$

$$\therefore (x-5)(y-5)=-20$$

が成り立つ。 x, y が0以上10以下の整数であることから、 x と y の値の組は

$$(x, y)=(10, 1), (9, 0), (1, 10), (0, 9)$$

の4通りである。このうち、 $x+y$ が最大となるのは(10, 1)または(1, 10)である。また

$x=y=10$ のとき、相関係数 r の値は

$$\begin{aligned} r &= \frac{2\cdot 10\cdot 10-10\cdot 10-10\cdot 10+90}{\sqrt{2\cdot 10^2-20\cdot 10+165}\cdot\sqrt{2\cdot 10^2-20\cdot 10+115}} \\ &= \frac{90}{\sqrt{165}\cdot\sqrt{115}} \\ &= \frac{6\sqrt{759}}{253} \end{aligned}$$

である。

Ⅲ

[1]

関数 $f(x)=x^3+3ax^2-9a^2x+a$ の導関数 $f'(x)$ は、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2+6ax-9a^2 \\ &= 3(x-a)(x+3a) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $a>0$ より $-3a<a$ であることに注意すると、 $f(x)$ の増減表は下表のようになる。

x	$\cdots$	$-3a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

したがって、 $x=a$ のとき極小値 $f(a)=-5a^3+a$ を、 $x=-3a$ のとき極大値 $f(-3a)=27a^3+a$ をとる。

$$\text{(答) 極大値：} 27a^3+a \text{ (} x=-3a \text{), 極小値：} -5a^3+a \text{ (} x=a \text{)}$$

[2]

$y=f(x)$ の $0\leq x\leq 4$ における最小値を、 $0<a<4$ と $4\leq a$ で場合分けして考える。

[1] $0<a<4$ の場合

$y=f(x)$ の $0\leq x\leq 4$ における増減表は下表のようになる。

x	0	$\cdots$	a	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(0)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	$f(4)$

したがって、最小値 $m(a)$ は、

$$\begin{aligned} m(a) &= f(a) \\ &= -5a^3+a \end{aligned}$$

となる。

[2] $4\leq a$ の場合

$y=f(x)$ の $0\leq x\leq 4$ における増減表は下表のようになる。

x	0	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$f(0)$	$\searrow$	$f(4)$

したがって、最小値 $m(a)$ は、

$$\begin{aligned} m(a) &= f(4) \\ &= -36a^2+49a+64 \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答) } m(a)=\begin{cases} -5a^3+a & (0<a<4) \\ -36a^2+49a+64 & (a\geq 4) \end{cases}$$

[3]

[2] の途中過程より、 $y=f(x)$ の $0\leq x\leq 4$ における最大値は $M(a)=f(0)=a$ になる場合と $M(a)=f(4)=-36a^2+49a+64$ になる場合の2通りに分けられる。

[1] $M(a)=f(0)$ の場合

$f(0)\geq f(4)$ が成り立っているので、 $a>0$ より

$$a\geq -36a^2+49a+64$$

$$\therefore a\geq \frac{2+2\sqrt{5}}{3}$$

である。

[2] $M(a)=f(4)$ の場合

$f(0)\leq f(4)$ が成り立っているので、 $a>0$ より

$$a\leq -36a^2+49a+64$$

$$\therefore 0<a\leq \frac{2+2\sqrt{5}}{3}$$

である。

$$\text{(答) } M(a)=\begin{cases} -36a^2+49a+64 & (0<a<\frac{2+2\sqrt{5}}{3}) \\ a & (a\geq \frac{2+2\sqrt{5}}{3}) \end{cases}$$

[4]

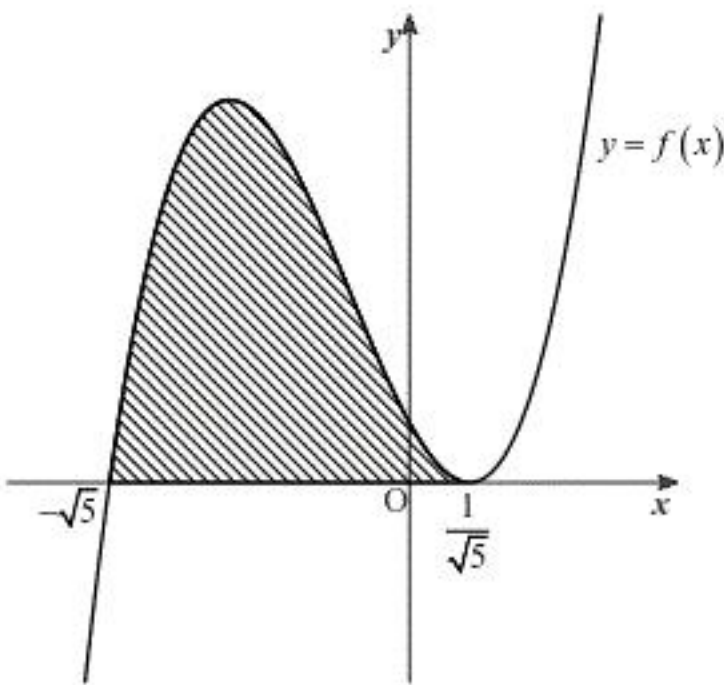
[1] より、 $y=f(x)$ の極大値は $27a^3+a>0$ であるから、 $y=f(x)$ の表す曲線が x 軸に接するのは、極小値が 0 となるときである。したがって、

$$\begin{aligned} f(a) &= 0 \\ \Leftrightarrow -5a^3+a &= 0 \\ \therefore a &= \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ (} \because a>0 \text{)} \end{aligned}$$

となる。このとき、

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3+3\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot x^2-9\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2\cdot x+\frac{1}{\sqrt{5}} \\ &= \left(x-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2\left(x+\sqrt{5}\right) \end{aligned}$$

であるから、曲線 $y=f(x)$ は x 軸と $x=-\sqrt{5}$, $\frac{1}{\sqrt{5}}$ で交わり、求める面積 S は下の斜線部の面積となる。



よって、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\sqrt{5}}^{\frac{1}{\sqrt{5}}} f(x) dx \\ &= \int_{-\sqrt{5}}^{\frac{1}{\sqrt{5}}} \left(x^3 + \frac{3}{\sqrt{5}} x^2 - \frac{9}{5} x + \frac{1}{\sqrt{5}} \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{\sqrt{5}} x^3 - \frac{9}{10} x^2 + \frac{1}{\sqrt{5}} x \right]_{-\sqrt{5}}^{\frac{1}{\sqrt{5}}} \\ &= \frac{108}{25} \end{aligned}$$

となる。