

【解答】

|   |   |   |                 |   |              |   |   |   |                           |
|---|---|---|-----------------|---|--------------|---|---|---|---------------------------|
| ア | 0 | イ | $p^2-3p^2q+q^2$ | ウ | $2pq^2-p^3q$ | エ | 1 | オ | $\frac{1\pm\sqrt{7}i}{2}$ |
|---|---|---|-----------------|---|--------------|---|---|---|---------------------------|

|   |   |   |            |   |       |   |                                  |   |                  |
|---|---|---|------------|---|-------|---|----------------------------------|---|------------------|
| カ | 6 | キ | $-88c+182$ | ク | $a>0$ | ケ | $\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}$ | コ | $\frac{3}{4}a^2$ |
|---|---|---|------------|---|-------|---|----------------------------------|---|------------------|

【解説】

[1]

3次方程式 $x^3-ax-b=0$ の解 $\alpha,\beta,\gamma$ に対し、解と係数の関係より
$$\alpha+\beta+\gamma=0\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{1}$$

が成り立つ。一方 $p=\beta+\gamma,q=\beta\gamma$ に対して、解と係数の関係より $c$ は2次方程式 $x^2-px+q=0$ の解となるため、
$$c^2=pc-q\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{2}$$

が成り立つ。式②を繰り返し用いることで

$$\begin{aligned}c^3&=c(pc-q)\\&=pc^2-qc\\&=p(pc-q)-qc\\&=(p^2-q)c-pq\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c^4&=c\{(p^2-q)c-pq\}\\&=(p^2-q)c^2-pqc\\&=(p^2-q)(pc-q)-pqc\\&=(p^3-2pq)c+(-p^2+q)q\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c^5&=c\{(p^3-2pq)c+(-p^2+q)q\}\\&=(p^3-2pq)c^2+(-p^2q+q^2)c\\&=(p^3-2pq)(pc-q)+(-p^2q+q^2)c\\&=(p^4-3p^2q+q^2)c+(2pq^2-p^3q)\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{4}\end{aligned}$$

を得る。以下、 $\alpha=-1,q=2$ の場合について考える。式①に $\alpha=-1$ を代入すると

$$\beta+\gamma=-\alpha=1$$

となり、 $p=1$ が導かれる。これと $q=2$ より $c$ は2次方程式 $x^2-x+2=0$ の解であるから

$$c=\frac{1\pm\sqrt{7}i}{2}$$

とわかる。 $p=1,q=2$ を式②、③、④に代入して得た式

$$\begin{aligned}c^2&=c-2\\c^3&=-c-2\\c^5&=-c+6\end{aligned}$$

から $c^5+c,c^{15}+c$ を計算すると

$$\begin{aligned}c^5+c&=6\\c^{15}+c&=(-c+6)^3+c\\&=-c^3+18c^2-108c+216+c\\&=-(-c-2)+18(c-2)-108c+216+c\\&=-88c+182\end{aligned}$$

となる。

[2]

曲線 $y=x^3-ax$ を $C$ 、直線 $y=b$ を $\ell$ 、 $f(x)=x^3-ax$ とおく。

[1]  $a>0$ のとき

$$\begin{aligned}f'(x)&=3x^2-a\\&=3\left(x-\sqrt{\frac{a}{3}}\right)\left(x+\sqrt{\frac{a}{3}}\right)\end{aligned}$$

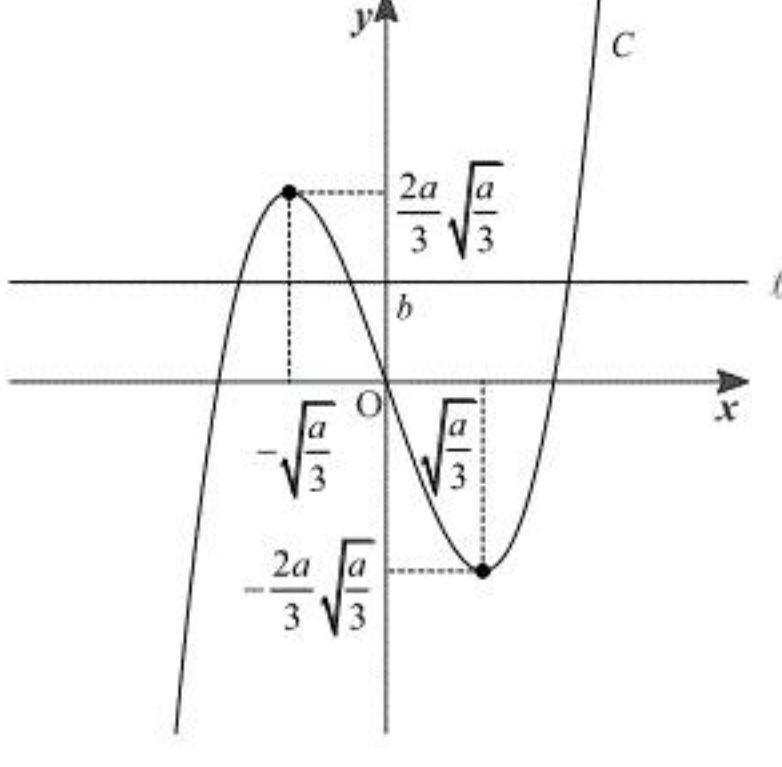
となるため、 $f(x)$ の増減は下表に従う。

|         |     |                       |     |                      |     |
|---------|-----|-----------------------|-----|----------------------|-----|
| $x$     | ... | $-\sqrt{\frac{a}{3}}$ | ... | $\sqrt{\frac{a}{3}}$ | ... |
| $f'(x)$ | +   | 0                     | -   | 0                    | +   |
| $f(x)$  | ↗   | 極大                    | ↘   | 極小                   | ↗   |

したがって、

$$\begin{aligned}f\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right)&=\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}\\f\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right)&=-\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}\end{aligned}$$

より、曲線 $C:y=x^3-ax$ の概形は次図のようになる。



上図より、このとき直線 $\ell$ と曲線 $C$ で囲まれた部分が存在するための必要十分条件は

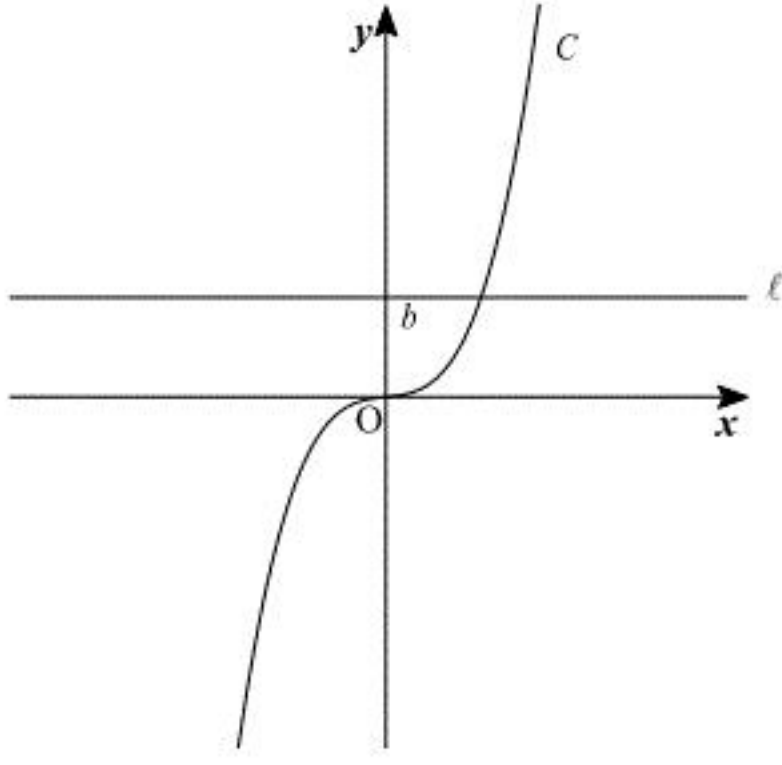
$$a>0\quad\text{かつ}\quad-\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}\leq b\leq\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}$$

である。

[2]  $a\leq 0$ のとき

$$f'(x)=3x^2-a\geq 0$$

となるため、 $f(x)$ は広義単調増加である。曲線 $C:y=x^3-ax$ の概形は下図のようになり、 $x$ 軸に平行な直線 $\ell$ と曲線 $C$ で囲まれた部分は存在しない。



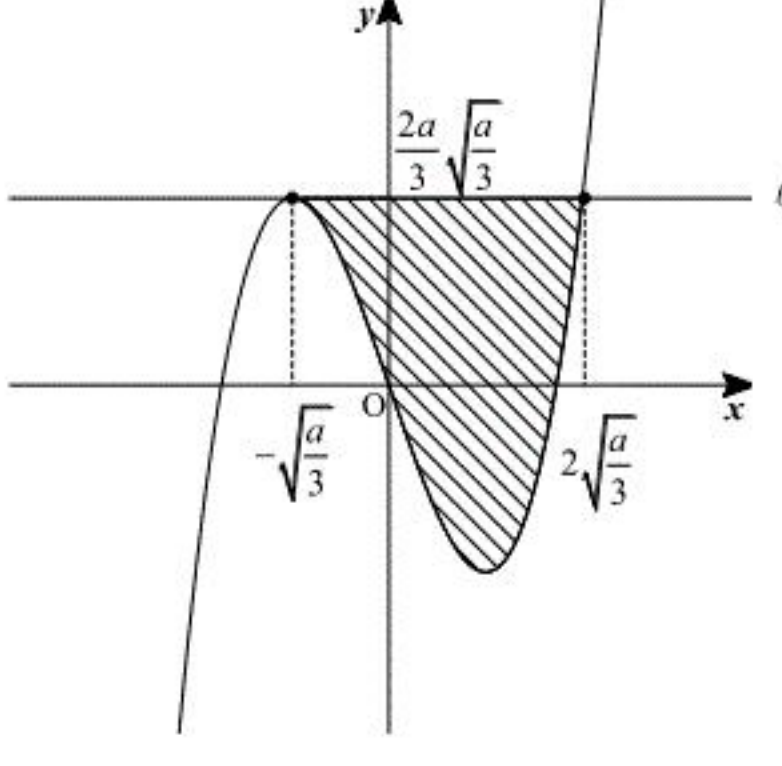
以上、[1],[2]より直線 $\ell$ と曲線 $C$ で囲まれた部分が存在するための必要十分条件は

$$a>0\quad\text{かつ}\quad-\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}\leq b\leq\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}$$

である。 $b=\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}$ のとき、曲線 $C$ と直線 $\ell$ の共有点の $x$ 座標は

$$\begin{aligned}x^3-ax&=\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}\\&\Leftrightarrow x^2-ax-\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}=0\\&\Leftrightarrow\left(x+\sqrt{\frac{a}{3}}\right)^2\left(x-2\sqrt{\frac{a}{3}}\right)=0\\&\therefore x=-\sqrt{\frac{a}{3}},2\sqrt{\frac{a}{3}}\end{aligned}$$

であるから、曲線 $C$ と直線 $\ell$ で囲まれた部分は下図の斜線部となる。



$A=2\sqrt{\frac{a}{3}},B=-\sqrt{\frac{a}{3}}$ とおくと、求める面積は

$$\begin{aligned}\int_B^A\{b-(x^3-ax)\}dx&=-\int_B^A(x-B)^2(x-A)dx\\&=-\int_B^A(x-B)^2(x-B+B-A)dx\\&=-\int_B^A\{(x-B)^3+(B-A)(x-B)^2\}dx\\&=-\left[\frac{1}{4}(x-B)^4+\frac{1}{3}(B-A)(x-B)^3\right]_B^A\\&=\frac{1}{12}(A-B)^4\\&=\frac{1}{12}\left(2\sqrt{\frac{a}{3}}+\sqrt{\frac{a}{3}}\right)^4\\&=\frac{3}{4}a^2\end{aligned}$$

と計算できる。

【解答】

|   |       |   |             |   |      |   |     |
|---|-------|---|-------------|---|------|---|-----|
| ア | $2at$ | イ | $a^2+t^2-1$ | ウ | $-1$ | エ | $1$ |
|---|-------|---|-------------|---|------|---|-----|

|   |       |   |                         |   |            |   |                          |
|---|-------|---|-------------------------|---|------------|---|--------------------------|
| オ | $-at$ | カ | $\sqrt{(1-a^2)(1-t^2)}$ | キ | $(1-a^2)t$ | ク | $\frac{2}{\sqrt{1+a^2}}$ |
|---|-------|---|-------------------------|---|------------|---|--------------------------|

|   |                |   |                   |   |                        |   |                           |   |                                      |
|---|----------------|---|-------------------|---|------------------------|---|---------------------------|---|--------------------------------------|
| ケ | $\sqrt{1-a^2}$ | コ | $-2a\sqrt{1-a^2}$ | サ | $(1-2a^2)\sqrt{1-a^2}$ | シ | $\frac{\pi-2}{4\sqrt{2}}$ | ス | $\frac{\sqrt{3}}{12}\pi-\frac{3}{8}$ |
|---|----------------|---|-------------------|---|------------------------|---|---------------------------|---|--------------------------------------|

【解説】

[1]

2つの図形

$$\begin{cases} \ell(t): y=ax+t & \cdots \textcircled{1} \\ C: x^2+\frac{y^2}{1-a^2}=1 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

が共有点を持つとき、式①、②から  $y$  を消去した式

$$\begin{aligned} x^2+\frac{(ax+t)^2}{1-a^2}&=1 \\ \Leftrightarrow x^2+2atx+(a^2+t^2-1)&=0 & \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

が実数解をもつ。よって、2次方程式③の判別式を  $D$  とおくと、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow a^2t^2-(a^2+t^2-1) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (a^2-1)(t^2-1) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (t+1)(t-1) &\leq 0 \quad (\because 0<a<1) \\ \therefore -1 &\leq t \leq 1 \end{aligned}$$

が成り立つ。 $t$  がこれを満たすとき、③の実数解は

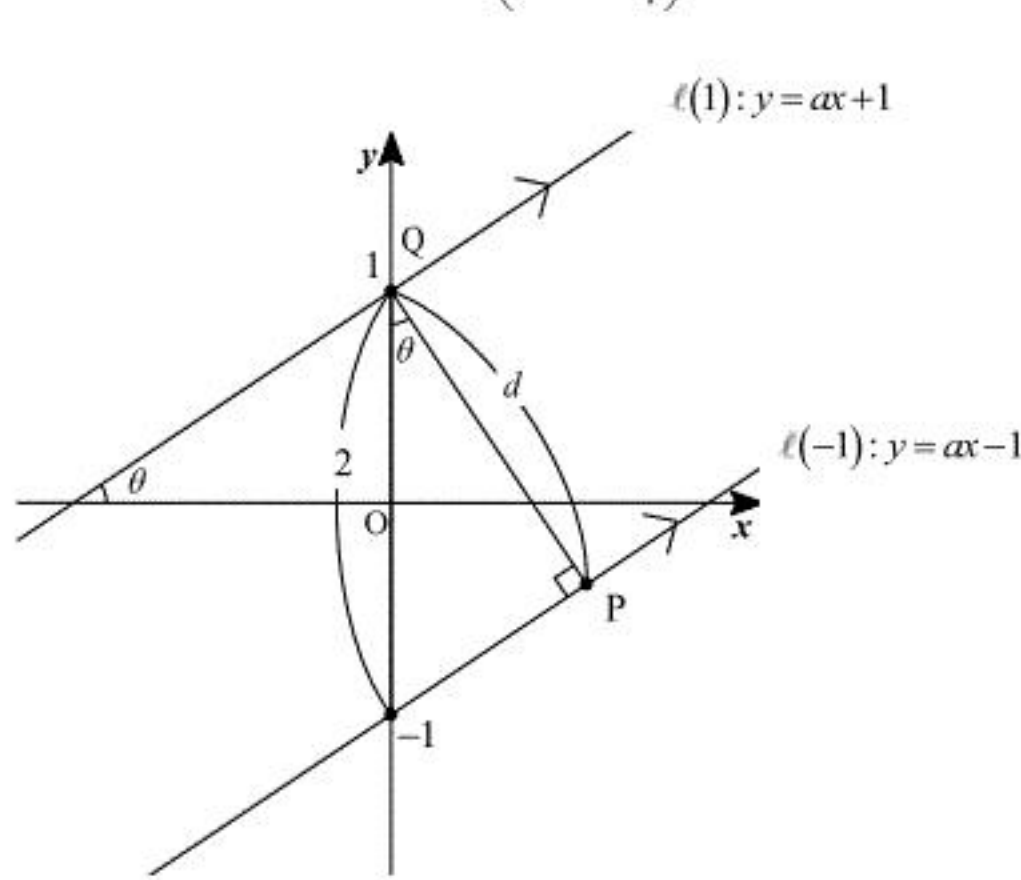
$$x=-at\pm\sqrt{(1-a^2)(1-t^2)}$$

であるから、①に代入すると、 $\ell(t)$  と  $C$  の共有点の座標は

$$\left(-at\pm\sqrt{(1-a^2)(1-t^2)}, (1-a^2)t\pm a\sqrt{(1-a^2)(1-t^2)}\right) \cdots \textcircled{4}$$

となる。また、点  $P$  が  $\ell(-1)$  上を動き、点  $Q$  が  $\ell(1)$  上を動くときの  $PQ$  の長さの最小値は下図

の  $d$  と一致する。ただし、 $\ell(1)$  と  $x$  軸のなす角を  $\theta$   $\left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$  とおいた。



$\tan\theta=a$  であるため、

$$\begin{aligned} d &= 2\cos\theta \\ &= \frac{2}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} \quad \left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{1+a^2}} \end{aligned}$$

となる。

[2]

$\ell(t)$  が点  $\left(0, \sqrt{1-a^2}\right)$  を通るとき、①より  $t=\sqrt{1-a^2}$  となる。 $\ell\left(\sqrt{1-a^2}\right)$  と  $C$  の共有点を  $x$  座標

の小さい方から順に  $A, B$  とすると、その座標は④に  $t=\sqrt{1-a^2}$  を代入し

$$A\left(0, \sqrt{1-a^2}\right), B\left(-2a\sqrt{1-a^2}, (1-2a^2)\sqrt{1-a^2}\right)$$

である。ここで  $\ell(t), C$  を  $y$  軸方向に  $\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$  倍に拡大した図形を  $\ell'(t), C'$  とする。またそれに対応して点  $A, B$  の移動先を点  $A', B'$  とする。 $\ell', C'$  の方程式および  $A', B'$  の座標はそれぞれ

$$\begin{aligned} \ell'(t): y &= \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}x+1 \\ C': x^2+y^2 &= 1 \\ A' &(0, 1) \\ B' &\left(-2a\sqrt{1-a^2}, 1-2a^2\right) \end{aligned}$$

となる。また、不等式

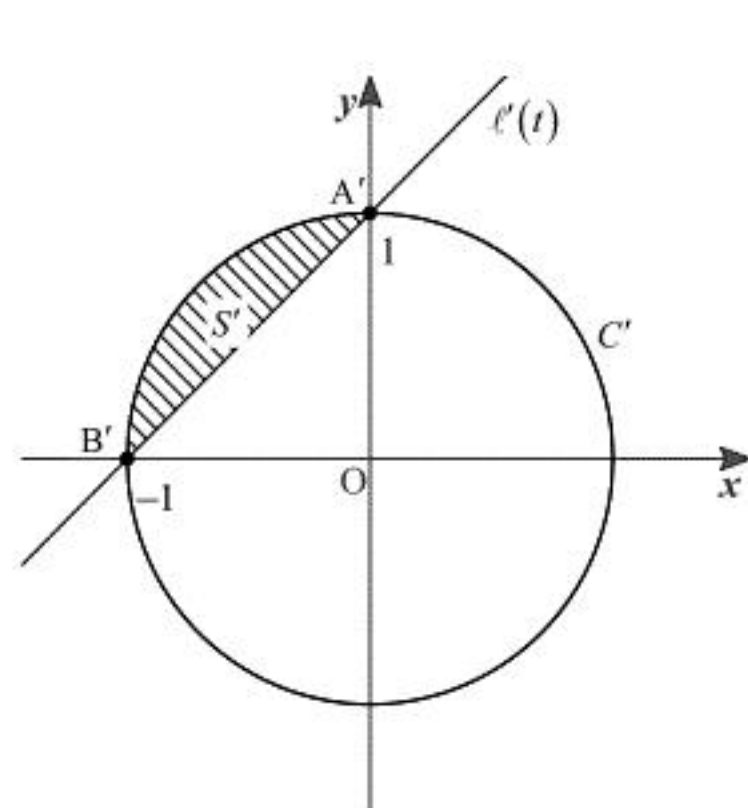
$$y \geq \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}x+1 \quad \text{かつ} \quad x^2+y^2 \leq 1 \quad \cdots \textcircled{5}$$

が表す領域の面積を  $S'$  とすると  $S:S'=1:\sqrt{1-a^2}$  となる。

[1]  $a\sqrt{1-a^2}=\frac{1}{2}$  のとき

$$\begin{aligned} a\sqrt{1-a^2} &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow a^2(1-a^2) &= \frac{1}{4} \quad (\because 0<a<1) \\ \Leftrightarrow a^4-a^2+\frac{1}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(a^2-\frac{1}{2}\right)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。このとき共有点  $B'$  の座標は  $(-1, 0)$  であるから、⑤が表す領域は下図の斜線部分のようになる。



上図より

$$S' = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

であるから、

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{1-a^2}S' \\ &= \sqrt{1-\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\pi-2}{4\sqrt{2}} \end{aligned}$$

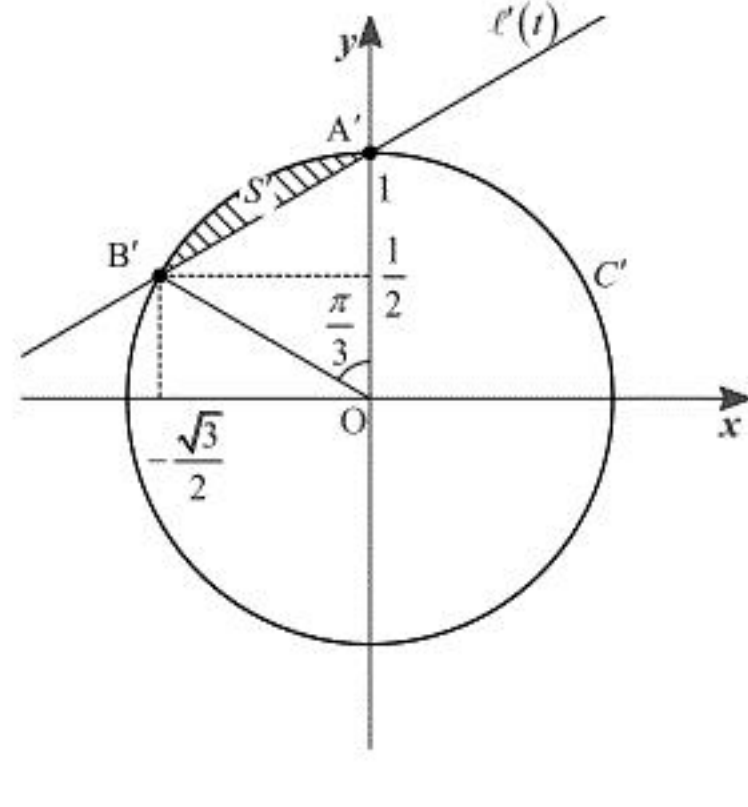
を得る。

[2]  $a\sqrt{1-a^2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$  かつ  $a<\sqrt{1-a^2}$  のとき

$$\begin{aligned} a\sqrt{1-a^2} &= \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \Leftrightarrow a^2(1-a^2) &= \frac{3}{16} \quad (\because 0<a<1) \\ \Leftrightarrow a^4-a^2+\frac{3}{16} &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2 &= \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow a &= \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\because 0<a<1) \end{aligned}$$

であり、このうち  $a<\sqrt{1-a^2}$  を満たすのは  $a=\frac{1}{2}$  である。このとき共有点  $B'$  の座標は

$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$  となるため、⑤が満たす領域は下図のようになる。



上図より、

$$S' = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

であるから、

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{1-a^2}S' \\ &= \sqrt{1-\frac{1}{4}}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{12}\pi - \frac{3}{8} \end{aligned}$$

を得る。

# III

【解答】

|   |       |   |       |   |        |   |                |   |                             |   |           |
|---|-------|---|-------|---|--------|---|----------------|---|-----------------------------|---|-----------|
| ア | $ y $ | イ | $ x $ | ウ | $4r^2$ | エ | $2\sqrt{3}r^2$ | オ | $2nr^2 \tan \frac{\pi}{2n}$ | カ | $\pi r^2$ |
|---|-------|---|-------|---|--------|---|----------------|---|-----------------------------|---|-----------|

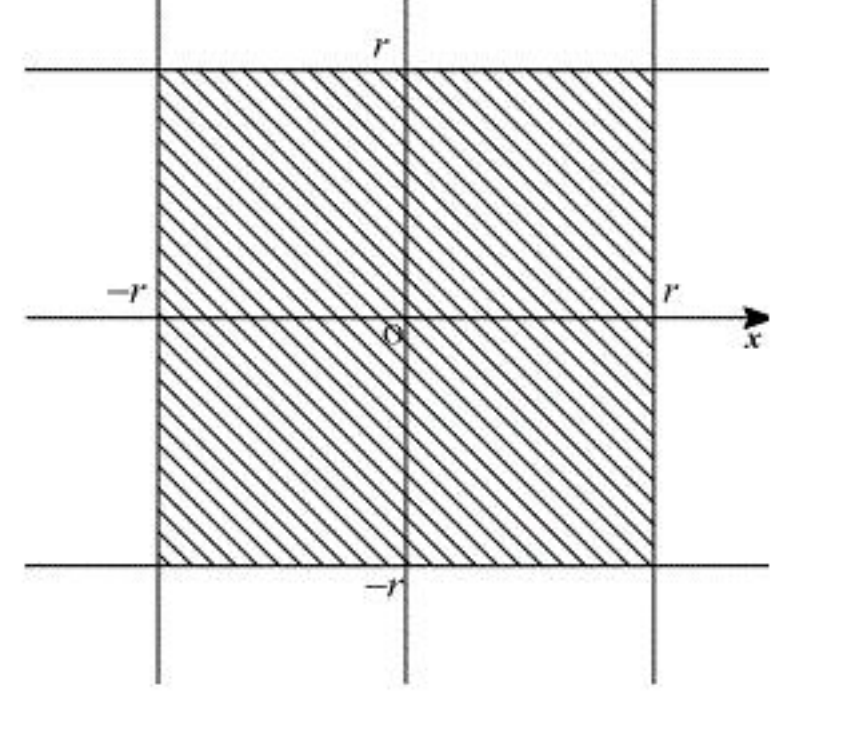
  

|   |             |   |              |   |                                     |   |                                       |   |                      |
|---|-------------|---|--------------|---|-------------------------------------|---|---------------------------------------|---|----------------------|
| キ | $(0, 0, r)$ | ク | $(0, 0, -r)$ | ケ | $2n(r^2 - t^2) \tan \frac{\pi}{2n}$ | コ | $\frac{8}{3}nr^3 \tan \frac{\pi}{2n}$ | サ | $\frac{4}{3}\pi r^3$ |
|---|-------------|---|--------------|---|-------------------------------------|---|---------------------------------------|---|----------------------|

【解説】

[1] (a)

点  $P(x, y)$  と  $x$  軸,  $y$  軸との距離はそれぞれ  $|x|, |y|$  であるから, 連立不等式  $|x| \leq r, |y| \leq r$  の表す領域は下図の斜線部分のようになる。ただし境界を含む。



上図より求める領域の面積は  $\{r - (-r)\}^2 = 4r^2$  である。

(b)

$m_0: y = 0$   
 $m_1: y = \sqrt{3}x$   
 $m_2: y = -\sqrt{3}x$

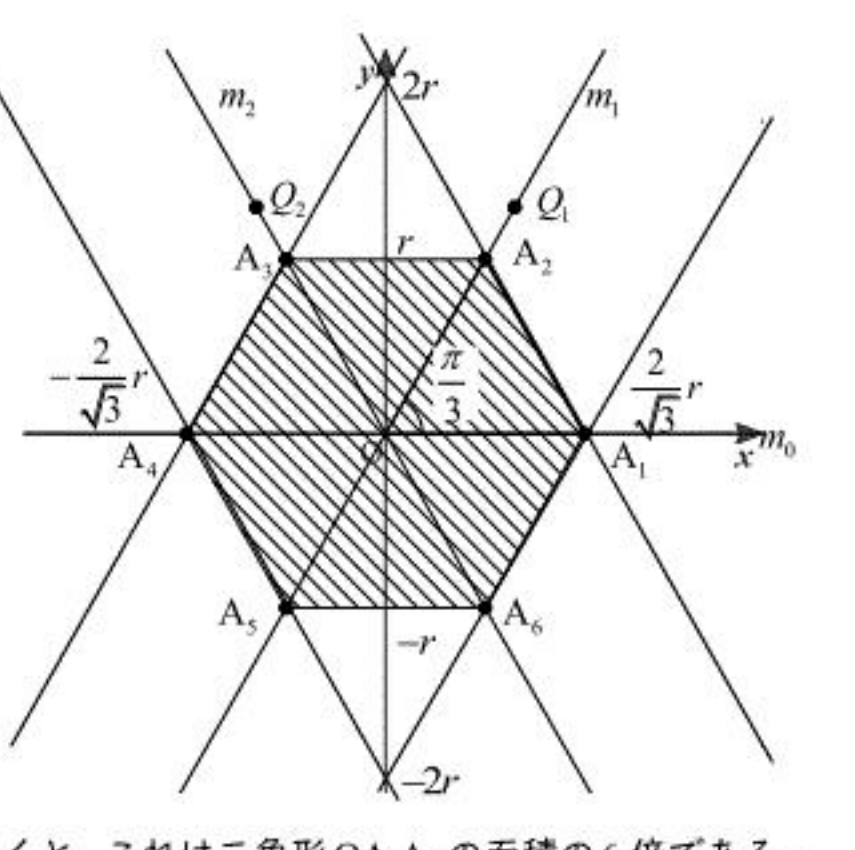
である。問題の連立不等式が表す領域は

$$d_0 \leq r, \quad d_1 \leq r, \quad d_2 \leq r$$

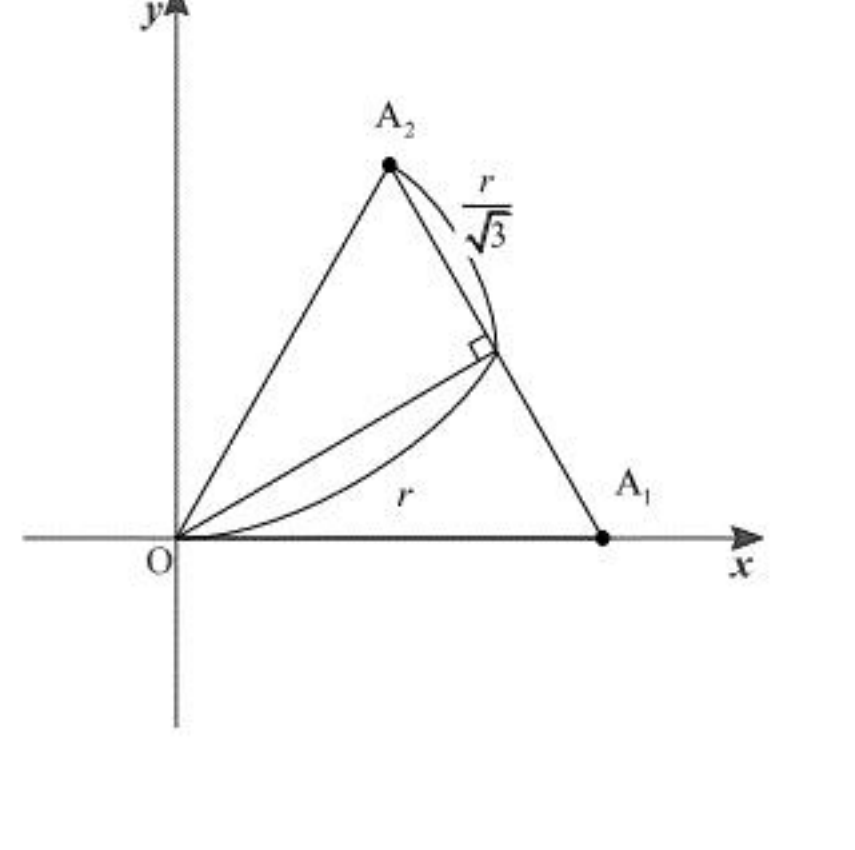
$$\Leftrightarrow |y| \leq r, \quad \frac{|y - \sqrt{3}x|}{\sqrt{1+3}} \leq r, \quad \frac{|y + \sqrt{3}x|}{\sqrt{1+3}} \leq r$$

$$\Leftrightarrow -r \leq y \leq r, \quad \sqrt{3}x - 2r \leq y \leq \sqrt{3}x + 2r, \quad -\sqrt{3}x - 2r \leq y \leq -\sqrt{3}x + 2r$$

より, 下図斜線部で示した正六角形  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$  の内部になる。



求める面積を  $S_3$  とおくと, これは三角形  $OA_1A_2$  の面積の 6 倍である。



よって上図より,

$$S_3 = 6 \cdot \frac{r^2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}r^2$$

となる。

(c)

問題の連立不等式が表す領域は次図に斜線部で示した通り, 正  $2n$  角形  $A_1A_2 \cdots A_{2n}$  の内部になる。ただし境界を含む。

求める面積を  $S_n$  とおくと, これは三角形  $OA_1A_2$  の  $2n$  倍である。

よって上図より,

$$S_n = 2n \left( r \cdot r \tan \frac{\pi}{2n} \right)$$

$$= 2nr^2 \tan \frac{\pi}{2n}$$

となる。さらに

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2nr^2 \tan \frac{\pi}{2n} \right) = \pi r^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n}{\pi} \tan \frac{\pi}{2n} \right)$$

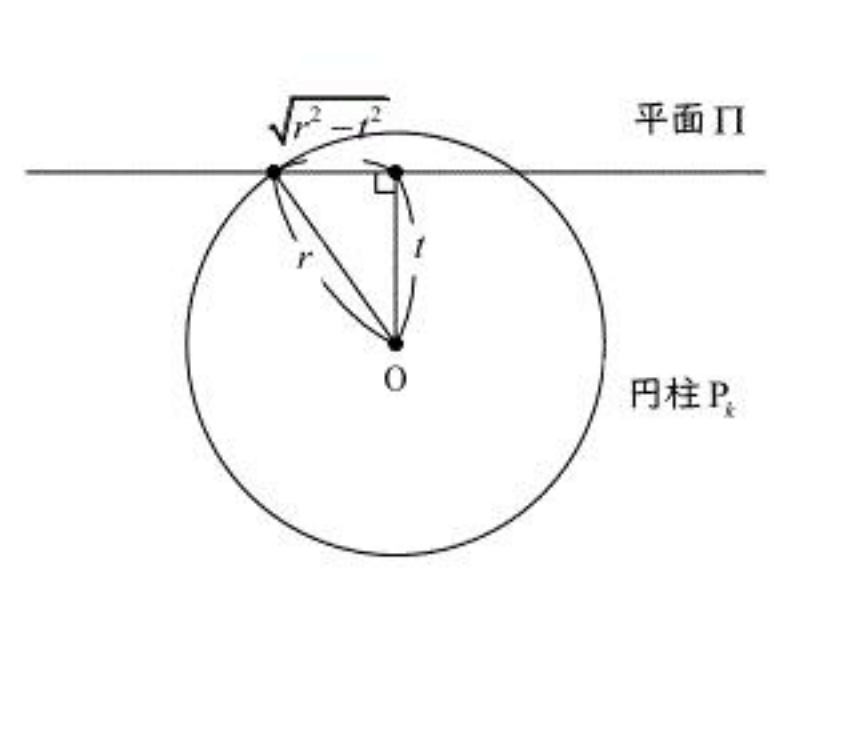
$$= \pi r^2 \lim_{\frac{\pi}{2n} \rightarrow 0} \left( \frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}} \cdot \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2n}} \right)$$

$$= \pi r^2$$

となる。

[2]

不等式  $e_k \leq r$  を満たす点の集合は直線  $\ell_k$  を軸とした半径  $r$  の円柱の内部である。この円柱を  $P_k$  とおくと, 問題の連立不等式が表す立体  $A_n$  は, 円柱  $P_1, P_2, \dots, P_n$  の共通部分である。したがって  $A_n$  内の点で  $z$  座標が最大の点は  $(0, 0, r)$ ,  $z$  座標が最小の点は  $(0, 0, -r)$  である。また  $A_n$  の平面  $\Pi: z = t$  による断面は各円柱  $P_k$  の平面  $\Pi$  による断面の共通部分となる。



上図より断面積は(c)で与えられた連立不等式において,  $r$  から  $\sqrt{r^2 - t^2}$  に置き換えた連立不等式が表す領域の面積に一致し, その面積は

$$2n(r^2 - t^2) \tan \frac{\pi}{2n} \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。よって  $A_n$  の体積は, ①が  $t$  に関して偶関数であることを利用すると

$$\begin{aligned} \int_{-r}^r 2n(r^2 - t^2) \tan \frac{\pi}{2n} dt &= \int_{-r}^r 2n(r^2 - t^2) \tan \frac{\pi}{2n} dt \\ &= 2 \int_0^r 2n \tan \frac{\pi}{2n} (r^2 - t^2) dt \\ &= \left[ 4n \tan \frac{\pi}{2n} \left( r^2 t - \frac{1}{3} t^3 \right) \right]_0^r \\ &= \frac{8}{3} nr^3 \tan \frac{\pi}{2n} \end{aligned}$$

と計算できる。さらに [1] の結果を用いると

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{8}{3} nr^3 \tan \frac{\pi}{2n} \right) &= \frac{4}{3} r \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2nr^2 \tan \frac{\pi}{2n} \right) \\ &= \frac{4}{3} r \cdot \pi r^2 \\ &= \frac{4}{3} \pi r^3 \end{aligned}$$

となる。

IV

〔解答〕

|   |         |   |                 |   |       |   |    |   |          |   |   |
|---|---------|---|-----------------|---|-------|---|----|---|----------|---|---|
| ア | $Q-M^2$ | イ | $1-\frac{j}{5}$ | ウ | $1-y$ | エ | 11 | オ | $2y-y^2$ | カ | 6 |
|---|---------|---|-----------------|---|-------|---|----|---|----------|---|---|

|   |               |   |            |   |               |   |                                          |   |   |   |   |
|---|---------------|---|------------|---|---------------|---|------------------------------------------|---|---|---|---|
| キ | $\frac{5}{2}$ | ク | $\sqrt{3}$ | ケ | $\frac{3}{5}$ | コ | $\frac{5}{\sqrt{6}}\sqrt{V-\frac{3}{5}}$ | サ | 5 | シ | 4 |
|---|---------------|---|------------|---|---------------|---|------------------------------------------|---|---|---|---|

〔解説〕

[1]

$V$  を計算し

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} (x_k - M)^2 \\ &= \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} x_k^2 - 2M \cdot \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} x_k + \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} M^2 \\ &= Q - 2M^2 + M^2 \\ &= Q - M^2 \end{aligned}$$

を得る。

[2]

赤玉を  $i$  回、白玉を  $j$  回取り出すとき、黒玉は  $10-j-i$  回取り出される。よって、平均  $M$ 、2乗平均  $Q$  は  $i, j, C$  を用いて表すと

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{10} \{i \cdot 1 + j \cdot (-1) + (10-i-j) \cdot C\} \\ &= \frac{1}{10} \{10C + i(1-C) - j(1+C)\} \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1} \\ Q &= \frac{1}{10} \{i \cdot 1^2 + j \cdot (-1)^2 + (10-i-j) \cdot C^2\} \\ &= C^2 + \frac{1}{10} (1-C^2)(i+j) \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となる。 $C=1$  のとき式①、②より

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{10} (10 \cdot 1 + i \cdot 0 - j \cdot 2) \\ &= 1 - \frac{j}{5} \\ &= 1 - y \\ Q &= 1^2 + \frac{1}{10} (1-1^2)(i+j) = 1 \\ V &= Q - M^2 \\ &= 1 - (1-y)^2 \\ &= 2y - y^2 \end{aligned}$$

を得る。 $y = \frac{j}{5}$  は  $j=0, 1, \dots, 10$  と一対一に対応するので、11個の相異なる値をとる。また

$$\begin{aligned} V &= 1 - (1-y)^2 \\ &= 1 - \frac{1}{25} (5-j)^2 \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} 5-j &= 5, 4, \dots, 1, 0, -1, -2, \dots, -5 \\ \therefore |5-j| &= 0, 1, 2, 3, 4, 5 \end{aligned}$$

より  $V$  は6個の相異なる値をとる。

[3] (a)

$i=j=3$  のとき式①より

$$M = \frac{1}{10} \{10C^2 + 3(1-C) - 3(1+C)\} = \frac{2}{5} C \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

となる。 $M=1$  となるのは式③より  $C = \frac{5}{2}$  のときである。

(b)

$i=j=3$  のとき式②より

$$\begin{aligned} Q &= C^2 + \frac{1}{10} (1-C^2)(3+3) \\ &= \frac{2}{5} C^2 + \frac{3}{5} \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{4} \end{aligned}$$

となる。式③、④および [1] の結果から  $V$  は

$$\begin{aligned} V &= Q - M^2 \\ &= \left( \frac{2}{5} C^2 + \frac{3}{5} \right) - \left( \frac{2}{5} C \right)^2 \\ &= \frac{6}{25} C^2 + \frac{3}{5} \end{aligned}$$

となる。よって、 $V=1$  となるのは

$$\begin{aligned} \frac{6}{25} C^2 + \frac{3}{5} &= 1 \\ \Leftrightarrow C^2 &= \frac{5}{3} \\ \therefore C &= \sqrt{\frac{5}{3}} \quad (\because C \geq 0) \end{aligned}$$

のときである。

(c)

$C \geq 0$  より、 $V = \frac{6}{25} C^2 + \frac{3}{5}$  は  $\frac{3}{5}$  以上の任意の値をとるから、 $a \geq \frac{3}{5}$  のときに限り  $V=a$  となる  $C$  が存在する。このとき、

$$\begin{aligned} a &= \frac{6}{25} C^2 + \frac{3}{5} \\ \Leftrightarrow C^2 &= \frac{25}{6} \left( a - \frac{3}{5} \right) \\ \therefore C &= \frac{5}{\sqrt{6}} \sqrt{V - \frac{3}{5}} \quad (\because C \geq 0, \ a \geq \frac{3}{5}, \ V=a) \end{aligned}$$

となる。

[4]

$j=3$  のとき、式①、②より

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{10} \{10C + i(1-C) - 3(1+C)\} \\ &= \frac{1}{10} \{(7C-3) + (1-C)i\} \\ Q &= C^2 + \frac{1}{10} (1-C^2)(i+3) \end{aligned}$$

である。したがって  $V = Q - M^2$  に注意すると、

$$\begin{cases} M=1 \\ V=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{10} \{(7C-3) + (1-C)i\} = 1 \\ C^2 + \frac{1}{10} (1-C^2)(i+3) - 1 = 3 \end{cases}$$

が成り立つ。

$$\frac{1}{10} \{(7C-3) + (1-C)i\} = 1 \Leftrightarrow (1-C)i = 13-7C$$

より、

$$\begin{aligned} C^2 + \frac{1}{10} (1-C^2)(i+3) - 1 &= 3 \\ \Leftrightarrow (1+C)(1-C)(i+3) &= 40-10C^2 \\ \Leftrightarrow (1+C)(13-7C+3-3C) &= 40-10C^2 \quad (\because (1-C)i = 13-7C) \\ \Leftrightarrow (1+C)(16-10C) &= 40-10C^2 \\ \Leftrightarrow 6C &= 24 \\ \therefore C &= 4 \end{aligned}$$

を得る。 $(1-C)i = 13-7C$  より、

$$\begin{aligned} (1-4)i &= 13-7 \cdot 4 \\ \therefore i &= 5 \end{aligned}$$

を得る。