

【解答】

〔1〕	ア	イ	ウ	エ	オ
	2	3	5	$a < 5 - 2\sqrt{6}$	-1
〔2〕	カ	キ	ク	ケ	
	$\frac{9}{10}a_n + p$	$1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$	$\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$	1	
〔3〕	コ	サ	シ		
	4	6	$\sqrt{3}$		

【解説】

〔1〕

$$(2^x - 3^x) \left(\frac{3}{2^x} - \frac{2}{3^x} \right) = a \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\Leftrightarrow 3 - 2 \left(\frac{2}{3} \right)^x - 3 \left(\frac{3}{2} \right)^x + 2 = a$$

$$\Leftrightarrow 2 \left(\frac{2}{3} \right)^x + 3 \left(\frac{3}{2} \right)^x + a = 5$$

であるので、 $X = \left(\frac{2}{3} \right)^x$ とおくと①は、

$$2 \left(\frac{2}{3} \right)^x + 3 \left(\frac{3}{2} \right)^x + a = 5$$

$$\Leftrightarrow 2 \left(\frac{2}{3} \right)^x + 3 \frac{1}{\left(\frac{2}{3} \right)^x} + a = 5$$

$$\Leftrightarrow 2X + \frac{3}{X} + a = 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

と表すことができる。ここで、全ての実数 x に対して $\left(\frac{2}{3} \right)^x > 0$ であるので $X > 0$ である。こ

のもとで②は、 $2X^2 + (a-5)X + 3 = 0$ と変形できる。よって、

$$\begin{aligned} f(X) &= 2X^2 + (a-5)X + 3 \\ &= 2 \left(X - \frac{5-a}{4} \right)^2 + 3 - \frac{(a-5)^2}{8} \end{aligned}$$

とおくと、②が異なる2つの正の実数解をもつ条件は、

$$\begin{cases} \frac{5-a}{4} > 0 \\ 3 - \frac{(a-5)^2}{8} < 0 \\ f(0) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 5 \\ a < 5 - 2\sqrt{6}, 5 + 2\sqrt{6} < a \\ 0 < 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a < 5 - 2\sqrt{6}$$

である。またこのとき①の異なる実数解を α, β とすると、題意より②の2解は $\left(\frac{2}{3} \right)^\alpha, \left(\frac{2}{3} \right)^\beta$

と表すことができる。ここで解と係数の関係より、

$$\left(\frac{2}{3} \right)^\alpha \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^\beta = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3} \right)^{\alpha+\beta} = \left(\frac{2}{3} \right)^{-1}$$

であるので $\alpha + \beta = -1$ である。

〔2〕

題意より、 $n+1$ 回目に水を入れるとき水槽には $\frac{9}{10}a_n$ リットルの水が入っており、そこに新たに p リットルの水を入れるので、

$$a_{n+1} = \frac{9}{10}a_n + p \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

が成立する。ここで① $\Leftrightarrow a_{n+1} - 10p = \frac{9}{10}(a_n - 10p)$ と変形できるので、 $a_n - 10p$ は初項が

$a_1 - 10p = 10 - 10p$ 、公比が $\frac{9}{10}$ の等比数列である。よって、

$$\begin{aligned} a_n - 10p &= (10 - 10p) \left(\frac{9}{10} \right)^{n-1} \\ &= 10 \left\{ - \left(\frac{9}{10} \right)^{n-1} \right\} p + 10 \left(\frac{9}{10} \right)^{n-1} \\ \Leftrightarrow a_n &= 10 \left\{ 1 - \left(\frac{9}{10} \right)^{n-1} \right\} p + 10 \left(\frac{9}{10} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

である。以上より毎回水を入れた直後の水の容積が常に一定となるのは、

$$10 - 10p = 0 \Leftrightarrow p = 1$$

のときである。

〔3〕

題意より、1回目の小テストの標準偏差が2であるので分散は $2^2 = 4$ である。ここで1回目と2回目の成績が変わらなかった生徒の点数を p, q, r とおくと、

$$\begin{aligned} \frac{3 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 7 \cdot 2 + p + q + r}{10} &= 5 \\ \Leftrightarrow p + q + r &= 17 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

が成立する。また1回目の小テストの分散は4であるから、

$$\begin{aligned} \frac{3^2 \cdot 3 + 5^2 \cdot 2 + 7^2 \cdot 2 + p^2 + q^2 + r^2}{10} - 5^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow p^2 + q^2 + r^2 &= 115 \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となる。以上より2回目の小テストの平均は、

$$\frac{5 \cdot 3 + 8 \cdot 2 + 6 \cdot 2 + p + q + r}{10} = 6$$

であり、2回目小テストの分散は、

$$\frac{5^2 \cdot 3 + 8^2 \cdot 2 + 6^2 \cdot 2 + p^2 + q^2 + r^2}{10} - 6^2 = 3$$

である。よって標準偏差は $\sqrt{3}$ となる。

Ⅱ

【解答】

〔1〕	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ
	3	-2	qt	$\frac{9}{4q}$	1	2	$\frac{27}{4q}$
〔2〕	ク	ケ	コ	サ	シ		
	$\{\gamma(s)-\beta(s)\}\Delta y$	$q\Delta t$	0	y	$\frac{q}{\gamma(y)-\beta(y)}$		

【解説】

〔1〕

$$f(x)=x^3-6x^2+9x-2 \text{ とおくと,}$$

$$f(x)=0$$

$$\Leftrightarrow x^3-6x^2+9x-2=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2-4x+1)=0$$

$$\therefore x=2, 2\pm\sqrt{3}$$

である。また,

$$f'(x)=3x^2-12x+9$$

$$=3(x-1)(x-3)$$

であるので, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1, 3$ となる。よって $y=f(x)$ の増減表は以下の通りである。

x	...	1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

また,

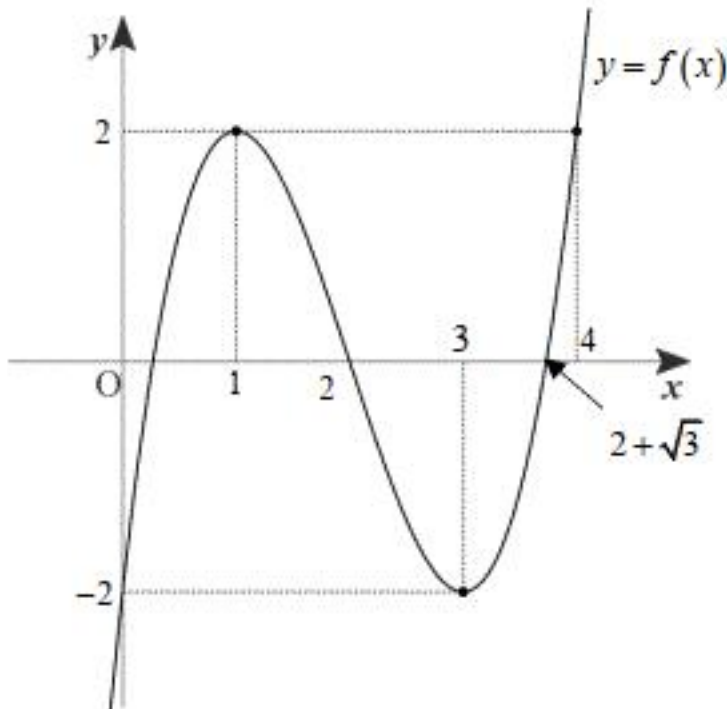
$$f(x)=2$$

$$\Leftrightarrow x^3-6x^2+9x-2=2$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(x-4)=0$$

$$\Leftrightarrow x=1, 4$$

であることに注意すると, $y=f(x)$ のグラフは以下のようになる。



以上より容器の最も深い部分の xy 座標は, $(3, -2)$ である。また単位時間あたりに流れ出る水の体積は q であるので, 時間 t の間に蛇口から流れ出る水の体積は qt である。ここで上図において, $y=f(x)$ と x 軸で囲まれる部分の面積を S_1 , $y=f(x)$ と $y=2$ で囲まれる部分の面積を S_2 とすると,

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_2^{2+\sqrt{3}} \{-f(x)\} dx \\ &= \int_2^{2+\sqrt{3}} -(x^3-6x^2+9x-2) dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + 2x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 2x \right]_2^{2+\sqrt{3}} \\ &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_1^4 \{2-f(x)\} dx \\ &= \int_1^4 (-x^3+6x^2-9x+4) dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + 2x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 4x \right]_1^4 \\ &= \frac{27}{4} \end{aligned}$$

である。よって, 容器が空の状態から水面が $y=0$ に到達するまでの時間を t_1 とすると,

$$qt_1 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow t_1 = \frac{9}{4q}$$

である。また上図より, 水があふれ出るところの x, y 座標は $(1, 2)$ であり, 容器が空の状態から水があふれ出るまでの時間を t_2 とすると,

$$qt_2 = \frac{27}{4} \Leftrightarrow t_2 = \frac{27}{4q}$$

となる。

〔2〕

題意の $x^3-6x^2+9x-2-s=0$ の解は, $y=x^3-6x^2+9x-2$ と $y=s$ の交点の x 座標を表しているのので, $\alpha(s) \leq \beta(s) \leq \gamma(s)$ に注意すれば, 求める奥行き 1 の直方体の体積は

$\{\gamma(s)-\beta(s)\}\Delta y$ と表すことができる。また, Δt の間に蛇口から流れ出る水の体積は $q\Delta t$ で

あるから,

$$\begin{aligned} q\Delta t &= \{\gamma(s)-\beta(s)\}\Delta y \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta t} &= \frac{q}{\gamma(s)-\beta(s)} \end{aligned}$$

が成立する。ここで $\Delta t \rightarrow 0$ のとき, $\Delta y \rightarrow 0, s \rightarrow y$ であるので,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{q}{\gamma(s)-\beta(s)} \\ &= \frac{q}{\gamma(y)-\beta(y)} \end{aligned}$$

となる。

Ⅲ

【解答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
2	-4	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{\sqrt{59}}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$-k^2+5k+\frac{17}{2}$	$\frac{5-\sqrt{31}}{2}$
サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ		
$\frac{5+\sqrt{31}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}}{3}$	$\frac{4\sqrt{5}}{15}$	$-\frac{2\sqrt{5}}{15}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{\sqrt{14}}{2}$		

【解説】

題意より $\angle AOP = 90^\circ$ であるので、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} &= 0 \\ \Leftrightarrow 0 \cdot t + 1 \cdot u + 2 \cdot t &= 0 \\ \Leftrightarrow u + 2t &= 0 \qquad \qquad \qquad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

が成立する。同様に題意より $OP = 2\sqrt{6}$ であるので、

$$\begin{aligned}\sqrt{t^2 + u^2 + t^2} &= 2\sqrt{6} \\ \Leftrightarrow u^2 + 2t^2 &= 24 \qquad \qquad \qquad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

が成立する。①、②より $(t, u) = (2, -4), (-2, 4)$ となるが、 $t > 0$ より $(t, u) = (2, -4)$ である。
またこれら4点を通る球面 S の中心を $Q(a, b, c)$ 、半径を r とおくと、

$$\begin{cases} QO = r \\ QA = r \\ QB = r \\ QP = r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = r^2 \\ a^2 + (b-1)^2 + (c-2)^2 = r^2 \\ (a-2)^2 + (b+1)^2 + (c-3)^2 = r^2 \\ (a-2)^2 + (b+4)^2 + (c-2)^2 = r^2 \end{cases}$$

が成立するのでこれらを解いて、

$$(a, b, c, r) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{\sqrt{59}}{2} \right)$$

となる。よって球面 S の方程式は $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{59}{4}$ であるので、球面 S と平面 $z = k$ が交わってできる円 C_1 の方程式は、

$$\begin{aligned}\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(k - \frac{5}{2}\right)^2 &= \frac{59}{4} \text{ かつ } z = k \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 &= -k^2 + 5k + \frac{17}{2} \text{ かつ } z = k\end{aligned}$$

である。この円の半径が $\sqrt{7}$ であるとき、

$$\begin{aligned}-k^2 + 5k + \frac{17}{2} &= 7 \\ \Leftrightarrow 2k^2 - 10k - 3 &= 0 \\ \therefore k &= \frac{5 \pm \sqrt{31}}{2}\end{aligned}$$

である。ここで $\overrightarrow{OA} = (0, 1, 2)$ 、 $\overrightarrow{OB} = (2, -1, 3)$ であるので、 $\vec{x} = (5, 4, -2)$ を考えると、

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} \cdot \vec{x} = 0 \\ \overrightarrow{OB} \cdot \vec{x} = 0 \end{cases}$$

であるので、 $\vec{x}$ は平面 α の法線ベクトルの一つである。以上より求める単位ベクトル $\vec{n}$ は、

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \frac{1}{|\vec{x}|} \cdot \vec{x} \\ &= \frac{1}{3\sqrt{5}} (5, 4, -2) \\ &= \left(\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{4\sqrt{5}}{15}, -\frac{2\sqrt{5}}{15} \right)\end{aligned}$$

となる。平面 α と球面 S が交わってできる円 C_2 の中心を R とすると、 $\overrightarrow{QR}$ は $\overrightarrow{QO}$ の $\vec{x}$ への正射影ベクトルであるので

$$\begin{aligned}\overrightarrow{QR} &= \frac{\overrightarrow{QO} \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|^2} \vec{x} \\ &= \frac{1}{2} \vec{x} \\ &= \left(\frac{5}{2}, 2, -1 \right)\end{aligned}$$

であり、よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QR} \\ &= \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right)\end{aligned}$$

となる。以上より円 C_2 の中心は $R\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ であり、半径は、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OR}| &= \sqrt{1^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{14}}{2}\end{aligned}$$

となる。

Ⅳ

〔解答〕

[1]	(a)	ア	イ
		$\frac{2}{7}$	$\frac{6}{35}$
	(b)	ウ	
		$\frac{3}{35}$	
	(c)	エ	オ
		$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{6}$
[2]	カ	キ	ク
	$\frac{n(n+1)}{(n+4)(n-2)}$	8	9

〔解説〕

[1](a)

2回目で初めて赤色のカードを引くのは、1回目に白色、2回目に赤色のカードを引くときであるから、その確率は、

$$\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$$

である。同様に3回目で初めて赤色のカードを引くのは、1回目に白色、2回目に白色、3回目に赤色のカードを引くときであるから、その確率は、

$$\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{35}$$

である。

(b)

1回で試行が終了したとすると、すべての引いたカードに書かれた数の合計は最大でも7であるので、不適。4回以上試行が行われたとすると、すべての引いたカードに書かれた数の合計は最小でも1+2+3+5=11であるので、不適。試行は2,3回目で終了した。1,2,3回目に引いたカードの数字をそれぞれ p, q, r とおく。ただし2回目で試行が終了したときは $r=0$ とする。ここで引いたカードの合計が10となるのは、

$$(p, q, r) = (1, 4, 5), (1, 3, 6), (1, 2, 7), (2, 1, 7), (2, 3, 5), (3, 1, 6), (3, 2, 5), (3, 7, 0) \\ (4, 1, 5), (4, 6, 0)$$

の10通りである。またこの中で、試行が2回で終わるときの確率は $\frac{1}{7 \cdot 6}$ 、試行が3回で終わ

る確率は $\frac{1}{7 \cdot 6 \cdot 5}$ である。よって求める確率は、

$$\frac{1}{7 \cdot 6 \cdot 5} \cdot 8 + \frac{1}{7 \cdot 6} \cdot 2 = \frac{3}{35}$$

である。

(c)

(b)と同様にして、引いたカードに書かれた数がすべて奇数であるのは、

$$(p, q, r) = (1, 3, 5), (1, 3, 7), (1, 5, 0), (1, 7, 0), (3, 1, 5), (3, 1, 7), (3, 5, 0), (3, 7, 0) \\ (5, 0, 0), (7, 0, 0)$$

の10通りである。また、1回で試行が終わるときの確率は $\frac{1}{7}$ であるので、引いたカードに書かれた数がすべて奇数である確率は、

$$\frac{1}{7 \cdot 6 \cdot 5} \cdot 4 + \frac{1}{7 \cdot 6} \cdot 4 + \frac{1}{7} \cdot 2 = \frac{2}{5}$$

である。このとき、引いたカードに1が含まれるのは、

$$(p, q, r) = (1, 5, 0), (1, 7, 0), (1, 3, 5), (3, 1, 5), (1, 3, 7), (3, 1, 7)$$

の6通りである。以上より求める条件付確率は、

$$\frac{\frac{1}{7 \cdot 6 \cdot 5} \cdot 4 + \frac{1}{7 \cdot 6} \cdot 2 + \frac{1}{7} \cdot 0}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{6}$$

である。

[2]

$n \geq 3$ のとき、4回目で初めて赤色のカードを引く確率は、

$$P_n(4) = \frac{{}_nP_3 \cdot {}_3P_1}{{}_nP_4} \\ = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot 3}{(n+3)(n+2)(n+1)n} \\ = \frac{3(n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

である。よって、

$$\frac{P_{n+1}(4)}{P_n(4)} = \frac{\frac{3n(n-1)}{(n+2)(n+3)(n+4)}}{\frac{3(n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)(n+3)}} \\ = \frac{n(n+1)}{(n-2)(n+4)}$$

となる。さらに、

$$\frac{P_{n+1}(4)}{P_n(4)} > 1 \Leftrightarrow 3 \leq n \leq 7$$

$$\frac{P_{n+1}(4)}{P_n(4)} = 1 \Leftrightarrow n = 8$$

$$\frac{P_{n+1}(4)}{P_n(4)} < 1 \Leftrightarrow n \geq 9$$

であるので、

$$P_3(4) < P_4(4) < \cdots < P_7(4) < P_8(4) = P_9(4) > P_{10}(4) > \cdots$$

が成立する。以上より $P_n(4)$ が最大となるのは $n=8, 9$ のときである。