

(第3時限：100分)

2020年度 ②

数 学 問 題

(理 系)

(全7ページ)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 問題文の にあてはまる適当なものを、解答用紙の所定の欄に記入しなさい。
3. 解答用紙1枚・下書用紙2枚は、この冊子の中に折り込んであります。
4. 試験終了後、問題冊子・下書用紙は持ち帰りなさい。

数 学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの設問について問題文の にあてはまる適当なものを，
解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

Ⅰ 座標平面上に点 A，点 B をとる。線分 AB の長さは，実数の定数 r (ただし $r > 2$)
を用いて， $r + 2$ と表される。点 A が x 軸上を動き，点 B が y 軸上を動くとき，線
分 AB を $2 : r$ に内分する点 P の軌跡を表す曲線 C を考える。

〔1〕 点 A の座標を $(a, 0)$ ，点 B の座標を $(0, b)$ ，点 P の座標を (x, y) とす
るとき， a, b を r, x, y を用いて表すと， $a = \text{ア}$ ， $b = \text{イ}$ となる。
そして，曲線 C の方程式は，次のように表される。

$$\text{ウ} = 1$$

ただし， ウ には， a と b は入らないとする。

〔2〕 実数 s, t を用いて方程式 $y = sx + t$ で表される直線を l_1 とする。直線 l_1 が
曲線 C と共有点をもつとき，共有点の x 座標は次の方程式の解である。

$$\left(\text{エ} \right) x^2 + 2r^2 stx + \left(\text{オ} \right) = 0$$

ただし， エ と オ は， r, s, t を用い， x と y は用いずに答えよ。

直線 l_1 が曲線 C の接線となるための必要十分条件は， r, s, t を用いて表すと

$$\text{カ} = 4$$

である。

〔3〕 直線 l_2 と直線 l_3 が垂直で、点 $Q(p, q)$ で交わるとする。

まず、直線 l_2 が、 x 軸と y 軸に平行ではない場合について考える。直線 l_2 の傾きを u とおくと、直線 l_2 の方程式は $y = \boxed{\text{キ}}$ と表される。直線 l_3 の方程式は $y = \boxed{\text{ク}}$ と表される。

直線 l_2 が曲線 C の接線となるための必要十分条件は、

$$\left(\boxed{\text{ケ}} \right) u^2 + 2pqu + \left(\boxed{\text{コ}} \right) = 0$$

である。ただし、 $\boxed{\text{ケ}}$ と $\boxed{\text{コ}}$ は、 p, q, r を用いて表す。一方、直線 l_3 が曲線 C の接線となるための必要十分条件は、

$$\left(\boxed{\text{コ}} \right) u^2 - 2pqu + \left(\boxed{\text{ケ}} \right) = 0$$

である。このとき、直線 l_2 と直線 l_3 の両方が曲線 C の接線であるように点 Q が動くとき、点 Q の軌跡を表す方程式は、 r を用いて次のように表される。

$$p^2 + q^2 = \boxed{\text{サ}}$$

なお、直線 l_2 が、 x 軸あるいは y 軸に平行な場合にも、この方程式は成り立っている。

II 自然数 a, b, ℓ に対して, a と b の最大公約数を d とする。このとき, 1 次不定方程式

$$ax + by = d\ell \quad \cdots \cdots (1)$$

の整数解 x, y を考える。

[1] 自然数 a', b' を用いて $a = a'd, b = b'd$ と表すと, a' と b' の最大公約数は $\boxed{\text{ア}}$ であり, 式 (1) は

$$a'x + b'y = \ell \quad \cdots \cdots (2)$$

となる。特に $\ell = 1$ のときの 1 次不定方程式 (2) の整数解の 1 つを x_0, y_0 とすると, 次のようになる。

$$a'x_0 + b'y_0 = 1 \quad \cdots \cdots (3)$$

式 (2) から式 (3) の ℓ 倍を引くと

$$a'(x - \ell x_0) + b'(y - \ell y_0) = 0 \quad \cdots \cdots (4)$$

となる。 a' と b' の最大公約数が $\boxed{\text{ア}}$ であり, $x - \ell x_0$ と $y - \ell y_0$ はともに整数であることから, $x - \ell x_0$ は $\boxed{\text{イ}}$ の倍数, $y - \ell y_0$ は $\boxed{\text{ウ}}$ の倍数となる。ここで, 整数 m を用いて

$$\frac{x - \ell x_0}{\boxed{\text{イ}}} = \frac{-(y - \ell y_0)}{\boxed{\text{ウ}}} = m \quad \cdots \cdots (5)$$

とおくと, 方程式 (1) の整数解は

$$x = \boxed{\text{エ}}, y = \boxed{\text{オ}}$$

と表される。

[2] $d = 1$ とする。整数解 $(x, y) = (\text{エ}, \text{オ})$ のうち、実数 c に

対して不等式 $y < -x^2 + c$ を満たすものを考える。

$y = -x^2 + c$ で定まる放物線と、1 次不定方程式 (1) すなわち

$ax + by = \ell$ で定まる直線は、 $c > \frac{\text{カ}}{4b^2}$ のときに異なる 2 つの共有点を

もち、その座標は

$$\left(\frac{a \pm \text{キ}}{2b}, \frac{2b\ell - a^2 \mp a\text{キ}}{2b^2} \right) \quad (\text{複号同順})$$

である。特に x 座標に注目すれば、整数解 $(x, y) = (\text{エ}, \text{オ})$

が $y < -x^2 + c$ を満たすためには、式 (5) の m は不等式

$$\text{ク} - \frac{\text{キ}}{2b^2} < m < \text{ク} + \frac{\text{キ}}{2b^2} \quad \dots\dots (6)$$

を満たす必要がある。したがって、 $a = 2$, $b = 3$, $\ell = 2$ のとき、不等式 (6) を満たす m の値がちょうど 2 個存在するために c がとりうる値の範囲は

$$\text{ケ} < c \leq \text{コ}$$

であることがわかる。

Ⅲ 実数 r を $0 \leq r < \frac{1}{\sqrt{2}}$ とする。次式によって与えられる定積分

$$K(r) = \int_{-r}^r \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-2x^2}}$$

の極限 $\lim_{r \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}-0} K(r)$ を以下の手順にしたがって求める。まず、準備として、次の

[1], [2], [3] について考える。

[1] 区間 $[0, 1]$ で関数 $f(t) = \frac{2t}{1+t^2}$ を考える。 $f'(t) = \boxed{\text{ア}} \geq 0$ より、 $f(t)$ の値域は $0 \leq f(t) \leq \boxed{\text{イ}}$ である。

また $\sqrt{1-\{f(t)\}^2} = \boxed{\text{ウ}}$ である。

[2] α は $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ で $\tan \alpha = \sqrt{2} + 1$ を満たしているとき

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \boxed{\text{エ}}$$

である。ただし、 $\boxed{\text{エ}}$ は α を用いずに答えよ。

[3] 定積分 I と J をそれぞれ次のようにおく。

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{2} + \sin \theta}, \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{2} - \sin \theta}$$

まず、 I を計算する。[1] で定義した $f(t)$ を用いて $\sin \theta = f(t)$ とおき、置換積分法を使うと、 I は

$$I = \int_0^1 \frac{\boxed{\text{オ}}}{\left(t + \boxed{\text{カ}}\right)^2 + \left(\boxed{\text{キ}}\right)^2} dt$$

となる。ただし、 $\boxed{\text{キ}}$ は正の実数である。ここで

$t + \boxed{\text{カ}} = \boxed{\text{キ}} \tan u$ とおいて置換積分法を使って [2] の α を用いて I を求めると $I = \boxed{\text{ク}}$ となる。

次に、 J についても同様の方法で求めると、 $J = \boxed{\text{ケ}}$ となる。

〔4〕 〔1〕 から 〔3〕 までの準備のもとで、極限 $\lim_{r \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} - 0} K(r)$ を求める。ここで、

$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta$ において $K(r)$ に置換積分法を用いると、

極限 $\lim_{r \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} - 0} K(r)$ は、 I と J を用いて コ と表すことができる。した

がって、極限 $\lim_{r \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} - 0} K(r)$ は、サ となる。

IV 虚数単位を i とし, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を虚数とする。

[1] 複素数平面上の点 z を原点を中心に $\arg \alpha$ だけ回転し, 原点からの距離を $|\alpha|$ 倍し, β だけ平行移動した点は $\boxed{\text{ア}}$ と表される。

[2] $z_0 = i$ とし, 自然数 n に対して, 点 z_n を以下のように定める。 z_n は z_{n-1} を原点を中心に $\arg \alpha$ だけ回転し, 原点からの距離を $|\alpha|$ 倍し, β だけ平行移動した点とする。 $a_n = |z_n - z_{n-1}|$ とおき, 数列 $\{a_n\}$ を考える。一般項 a_n を α, β および n で表すと, $a_n = \boxed{\text{イ}}$ となる。したがって, $|\alpha| < 1$ のとき,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \boxed{\text{ウ}}$$

である。

[3] 点 z を点 δ を中心に $\arg \gamma$ だけ回転し, 点 δ からの距離を $|\gamma|$ 倍した点は $\boxed{\text{エ}}$ である。任意の複素数 z について $\boxed{\text{ア}} = \boxed{\text{エ}}$ が成り立つとき, γ, δ をそれぞれ α, β を用いて表すと, $\gamma = \boxed{\text{オ}}$, $\delta = \boxed{\text{カ}}$ である。

[4] 実数 θ は $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を満たすとする。また, $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} (\cos \theta + i \sin \theta)$

であり, $\boxed{\text{カ}} = 1$ が成り立つとする。複素数平面上で 1 が表す点を B とし, [2] で定めた z_n が表す点を P_n とする。三角形 P_0BP_2 の面積は $\boxed{\text{キ}}$ であり, 三角形 $P_0P_1P_2$ の面積は $\boxed{\text{ク}}$ となる。

三角形 $P_{n-1}P_nP_{n+1}$ の面積 S_n は $\boxed{\text{ケ}}$ となり,

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_{2n-1} = \boxed{\text{コ}}$$

である。ただし, $\boxed{\text{キ}}$, $\boxed{\text{ク}}$, $\boxed{\text{ケ}}$, $\boxed{\text{コ}}$ は, $z_0, z_1, z_2, z_{n-1}, z_n$ を用いずに表せ。

