

(第3時限：80分)

2020年度 ③

選 択 科 目 (全55ページ)

問 題

	ページ
政治・経済	1～10
日 本 史	11～22
世 界 史	23～34
地 理	35～50
数 学	51～55

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答にあたっては、上記の科目から1科目を選択しなさい。
3. 解答はすべて別紙の解答用紙に記入しなさい。
4. 試験終了後、問題冊子・選択しなかった解答用紙は持ち帰りなさい。

数 学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲの設問について解答せよ。ただし，Ⅰ，Ⅱについては問題文中の にあてはまる適当なものを，解答用紙の所定の欄に記入せよ。なお，解答が分数になる場合は，すべて既約分数で答えること。

Ⅰ

〔1〕 -1 の 3 乗根は -1 ， $+$ i ， $-$ i である。
ただし， i は虚数単位， i は正の値とする。 $\omega =$ $+$ i
とするとき，以下の式の値を求めよ。

(a) $\omega^{2030} =$

(b) $\frac{\omega^{17}}{\omega^{20} + 1} =$

(c) $\sum_{k=1}^{118} \omega^{k-1} = 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \cdots + \omega^{117} =$

〔2〕 平面上の円に n 本の弦を次の条件で引く。

- ① どの 2 本の弦も円の内部（円周上の点は含まない）で交わる。
- ② どの 3 本の弦も 1 点で交わることはない。

このとき，円の内部は n 本の弦によって A_n 個の部分に分割され，

$A_4 =$ $カ$ ， $A_5 =$ $キ$ となる。

次に， A_{n+1} を A_n を用いて表わすと，関係式 $A_{n+1} = A_n +$ $ク$ が成立する。したがって， A_n を n の式で表すと， $A_n =$ $ケ$ となる。また， A_n 個の部分の中で多角形であるものは $コ$ 個ある。

〔3〕 中心が原点 $O(0, 0)$, 半径が 2 の円周上に 3 点 $A(2, 0)$, $B(-2, 0)$, $P(\sqrt{3}, 1)$ がある。点 P を含む弧 AB 上に点 Q をとり, $\triangle OPQ$ の面積を S , その最大値を S_M とする。このとき, 次の問いに答えよ。

(a) S_M の値は サ であり, そのときの点 Q の座標は

$\left(\text{ シ }, \text{ ス } \right)$ である。

(b) $\triangle OPQ$ の面積が $S = \frac{1}{2} S_M$ となるときの, x 座標が最小となる点 Q の

座標は $\left(\text{ セ }, \text{ ソ } \right)$ である。

(c) $\triangle OPQ$ の面積が $S = \frac{1}{3} S_M$ となるときの, x 座標が最大となる点 Q の

座標は $\left(\text{ タ }, \text{ チ } \right)$ である。

Ⅱ 企業 X と企業 Y は、ともに廃棄物を 8 トンずつ排出する予定であり、その削減が求められている。企業 X と企業 Y が廃棄物を削減する量（単位はトン）をそれぞれ x ($0 < x \leq 8$), y ($0 < y \leq 8$) で表すとき、その削減にかかる費用（単位は万円）は次の $f(x)$, $g(y)$ で表される。

$$f(x) = 3x^2$$

$$g(y) = 10y^3$$

いま、政府は、企業 X と企業 Y の廃棄物の排出量を合計で 6 トン削減することが望ましいと考えている。その合計 6 トンの削減を実現するために、政府は以下の 2 種類の制度を考える。

〔1〕 まず、政府が各企業の廃棄物の削減量を決めて、その削減を命じる制度を考える。

(a) 企業 X と企業 Y に廃棄物をそれぞれ 3 トンずつ削減するように命じるとき、その削減にかかる費用は、企業 X と企業 Y の合計で ア 万円となる。

(b) 企業 X と企業 Y を合わせて廃棄物を 6 トン削減し、かつ廃棄物の削減にかかる費用の合計を最も小さくするためには、政府は企業 X に イ トン、企業 Y に ウ トン削減するように命じればよい。このとき、廃棄物の削減にかかる費用は、企業 X と企業 Y の合計で エ 万円となる。

〔2〕 次に、政府が各企業に金銭的な動機を与え、企業自身が廃棄物の削減量を決める制度を考える。なお以下では、企業Xと企業Yはそれぞれ、負担する金額が最小になるように削減量を決めると仮定する。

(a) 政府が、廃棄物の排出1トン当たり t ($t > 0$) 万円の税金の支払いを企業に課す制度を考える。この制度の下で、企業Xが廃棄物の排出を x トン削減するとき、企業Xが負担する金額は、 $(8 - x)$ トンの廃棄物の排出に対して支払う税金と、その削減にかかる費用 $f(x)$ との合計となる。このとき、企業Xが削減する廃棄物の量は、 t を用いて表すと トンとなる。従って、企業Xが廃棄物を トン削減するように誘導するためには、政府は $t =$ 万円の税金を課せばよい。また、 $t =$ 万円のとき、企業Yも廃棄物を トン削減することになり、企業Xと企業Yが支払う税金の合計は 万円となる。

(b) 政府が、廃棄物の削減1トン当たり s ($s > 0$) 万円の補助金を企業に与える制度を考える。この制度の下で、企業Xが廃棄物を x トン削減するとき、企業Xが負担する金額は、削減にかかる費用 $f(x)$ から補助金の額を差し引いた金額となる。このとき、企業Xが削減する廃棄物の量は、 s を用いて表すと トンとなる。従って、企業Xが廃棄物を トン削減するように誘導するためには、政府は $s =$ 万円の補助金を与えればよい。また、 $s =$ 万円のとき、企業Yも廃棄物を トン削減することになり、企業Xと企業Yが受け取る補助金の合計は 万円となる。

(c) 政府が、廃棄物の排出1トン当たり T 万円の税金の支払いを企業に課し、同時に廃棄物の削減1トン当たり S 万円の補助金を企業に与える制度を考える。(a) (b) と同様に考えれば、企業Xが廃棄物を トンだけ削減するように誘導するためには、 T と S は の関係式を満たす必要がある。さらに、この制度のもとで、企業Xと企業Yが支払う税金の合計と、受け取る補助金の合計が等しくなるように T と S を決めるとき、 T は 万円、 S は 万円となる。

Ⅲ

〔1〕 1枚のコインを2回続けて投げるとき，2回とも表が出る確率を求めよ。

〔2〕 8枚のコインを同時に投げるとき，6枚が表である確率を求めよ。

次に，最初に8枚のコインを同時に投げ，裏が出たコインは取り除き，表の出たコインすべてをもう一度同時に投げて試行を終了する。ただし，最初に8枚すべて裏が出たときは，そこで試行を終了する。試行を終了したとき，表が出ているコインの数が r である確率を P_r とする。

〔3〕 P_6 を求めよ。

〔4〕 P_r を求めよ。ただし，必要ならば，組合せの総数を表す ${}_nC_r$ の記号を用いて答えてよい。

〔5〕 〔4〕で求めた P_r の値が最大となるときの r の値を求めよ。