

(第3時限：80分)

2020年度 ④

選 択 科 目 (全51ページ)

問 題

	ページ
政治・経済	1～10
日 本 史	11～22
世 界 史	23～34
地 理	35～46
数 学	47～51

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答にあたっては、上記の科目から1科目を選択しなさい。
3. 解答はすべて別紙の解答用紙に記入しなさい。
4. 試験終了後、問題冊子・選択しなかった解答用紙は持ち帰りなさい。

数 学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲの設問について解答せよ。ただし，Ⅰ，Ⅱについては問題文中の にあてはまる適当なものを，解答用紙の所定の欄に記入せよ。なお，解答が分数になる場合は，すべて既約分数で答えること。

Ⅰ

〔1〕 関数

$$y = -|x^2 + 4x| + 2x + 8 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

のグラフと x 軸との共有点の x 座標は， ア ， イ ， ウ である。

また，関数①のグラフと直線 $y = m\left(x + \frac{7}{4}\right)$ とが4つの共有点をもつような定数 m の範囲は， エ $< m <$ オ ，または カ $< m <$ キ である。ただし， エ $<$ カ とする。

〔2〕 座標空間内の2点 A (0, 0, 6),

B $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta, \frac{4}{3}\cos\theta - \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\cos\theta + \frac{10}{3}\right)$ を考える。ただし，

$0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

2点 A, B を通る直線が xy 平面と交わる点の座標を $(p, q, 0)$ とすると，

$$p = \frac{\text{ク}}{2 - \text{ケ}}$$

$$q = \frac{\text{コ}}{2 - \text{サ}}$$

となる。これから $p^2 + q^2 =$ シ となる。

[3] 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = \frac{2}{3}, a_2 = \frac{1}{4}, a_3 = \frac{2}{15}, a_4 = \frac{1}{12}, a_5 = \frac{2}{35}, a_6 = \frac{1}{24}, \dots$$

と与えられている。このとき、

(a) $a_7 =$ ス である。

(b) $a_8 =$ セ である。

(c) k 番目の項 a_k の値は k を用いて ソ と表せる。

次に、 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ とするとき、

(d) S_8 の値は タ である。

(e) S_n の値は n を用いて チ と表せる。

Ⅱ ある製品の製造と販売を行う A 社は、製品を 1 単位あたり p ($p > 0$) の価格で販売する。この製品を x 単位 ($x \geq 0$) 製造するのにかかる費用 $f(x)$ は、以下の式により計算される。

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 18x$$

A 社の売上高は、 $g(x) = px$ で表され、売上高と費用との差で表される A 社の利潤 $h(x)$ は、 $h(x) = g(x) - f(x)$ となる。

ここで A 社は、利潤 $h(x)$ が最大となるように製造量 x を決めるものとする。このとき、 $h'(x) = 0$ の解について、以下の条件を考えることにより、A 社の製造量 x は、価格 p に応じて次のように決まる。

[1] $0 < p < \boxed{\text{ア}}$ のとき、 $h'(x) = 0$ は実数解をもたない。このとき、A 社の製造量 x は $\boxed{\text{イ}}$ となる。

[2] $p = \boxed{\text{ア}}$ のとき、 $h'(x) = 0$ は重解 $x = \boxed{\text{ウ}}$ をもつ。このとき、A 社の製造量 x は $\boxed{\text{エ}}$ となる。

- [3] $\boxed{\text{ア}} < p < \boxed{\text{オ}}$ のとき, $h'(x) = 0$ は異なる 2 つの正の実数解をもつ。それらを α, β ($0 < \alpha < \beta$) で表すとき, A 社の製造量 x は, $h(0)$ と $h(\beta)$ の大小関係により, 次のように決まる。なお, 以下の解答にあたっては, 次の同値関係を用いてもよい。

$$a \geq 0, b \geq 0 \text{ とするとき, } \sqrt{a} \geq \sqrt{b} \Leftrightarrow a \geq b$$

- (a) $h(0) > h(\beta)$ のとき, A 社の製造量 x は $\boxed{\text{カ}}$ となる。このとき, p の範囲は $\boxed{\text{ア}} < p < \boxed{\text{キ}}$ となる。

- (b) $h(0) < h(\beta)$ のとき, A 社の製造量 x は, p を用いて表すと, $\boxed{\text{ク}}$ となる。このとき, p の範囲は $\boxed{\text{キ}} < p < \boxed{\text{オ}}$ となる。

- (c) $h(0) = h(\beta)$ のとき, $p = \boxed{\text{キ}}$ となり, A 社の製造量 x は, $\boxed{\text{カ}}$, あるいは $\boxed{\text{ケ}}$ となる。

- [4] $p \geq \boxed{\text{オ}}$ のとき, $h'(x) = 0$ は正の実数解と 0 以下の実数解を 1 つずつもつ。このとき, A 社の製造量 x は, p を用いて表すと, $\boxed{\text{コ}}$ となる。

Ⅲ a, b, c を定数とする。円 C の方程式が

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

であるとき、次の問いに答えよ。

〔1〕 円 C の中心の x 座標が 4、半径が 2 である。円 C が点 $(6, 1)$ を通るとき、 a, b, c の値を求めよ。

〔2〕 以下、 a, b, c の値は〔1〕で求めた値とする。

続いて、点 $P(-2, 0)$ を通り、傾きが $\frac{1}{2}$ の直線を l とする。また、 l が円 C と異なる 2 点で交わるとき、その 2 つの共有点を Q, R とする。 l に関して、円 C の中心と対称である点を S とするとき、

(a) 点 S の座標を求めよ。

(b) 3 点 Q, R, S を通る円の方程式を求めよ。

(c) 線分 PQ, PR の長さの積 $PQ \cdot PR$ の値を求めよ。

